I. M. GELFAND G. E. ŞILOV

FUNCŢII GENERALIZATE

Traducerea şi notele la ediţia în limba română
de O. Berechet şi G. Gussi

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ
Bucureşti, 1983

Coperta de: CONSTANTIN GHEORGHIU — ENESCU

Redactor: ILEANA CÎNDROVEANU
Tehnoredactor: MARILENA DAMASCHINOPOL

Coli de tipar: 33,50
Bun de tipar: 28.01.1983

c. 630 I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu 23—25
București

CUPRINS

Prefață la prima ediție în limba rusă 7
Prefață la a doua ediție în limba rusă a primului volum 11
Notă privind terminologia și notația 13

CAPITOLUL I

Definiția distribuțiilor și proprietăți elementare

§ 1. Funcții test și distribuții 15
§ 2. Derivarea și integrarea distribuțiilor 32
§ 3. Regularizarea funcțiilor cu singularități algebrice (sau de tip putere) 62
§ 4. Funcții și distribuții asociate 106
§ 5. Convoluția distribuțiilor 126
§ 6. Soluții fundamentale ale ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți 152

Anexa I. Proprietățile locale ale distribuțiilor 173
Anexa II. Distribuții depinzînd de un parametru 180

CAPITOLUL II

Transformarea Fourier a distribuțiilor

§ 1. Transformarea Fourier a funcțiilor test 186
§ 2. Transformarea Fourier a distribuțiilor. Cazul unei singure variabile . . . 200
§ 3. Transformarea Fourier a distribuțiilor. Cazul mai multor variabile 230
§ 4. Transformarea Fourier și ecuațiile diferențiale 241

CAPITOLUL III

Tipuri particulare de distribuții

§ 1. Distribuții concentrate pe suprafețe netede 250
§ 2. Distribuții atașate unei forme pătratice 295
§ 3. Distribuții omogene 355
§ 4. Funcții oarecare la puterea λ 375

Rezumat al principalelor definiții și formule ale volumului I 397
Tabele de transformate Fourier 434
Anexa 3 442
Anexa 4 444
Anexa 5 496
Anexa 6. Unele aspecte ale dezvoltării teoriei funcțiilor generalizate 499
Note și referiri bibliografice 526
Bibliografie 528
Index de noțiuni 531

Prefață la prima ediție în limba rusă

Funcțiile generalizate capătă în momentul de față o răspîndire din ce în ce mai mare în diferite ramuri ale matematicii. Sub o formă neriguroasă ele au fost folosite de multă vreme de fizicieni.

Un rol însemnat în formarea teoriei funcțiilor generalizate l-au jucat lucrările lui J. Hadamard în care, în legătură cu studiul soluțiilor fundamentale ale ecuației undelor, erau considerate integrale divergente, precum și unele lucrări ale lui M. Riesz. Nu vom vorbi aici de lucrări și mai vechi, în care s-ar putea găsi elementele viitoarei teorii a funcțiilor generalizate. S. L. Sobolev a fost primul care a introdus în 1936 funcțiile generalizate într-o formă explicită și unanim acceptată azi, cu ocazia studiului unicității soluțiilor problemei Cauchy pentru ecuațiile liniare hiperbolice.

Pe de altă parte, teoria lui S. Bochner a transformării Fourier a funcțiilor cu creștere polinomială conduce foarte aproape de teoria funcțiilor generalizate. Aceste transformate Fourier sînt în esență funcții generalizate și apar la S. Bochner ca derivate formale de funcții continue.

În 1950—51 apare monografia lui L. Schwartz „Teoria distribuțiilor". În această carte L. Schwartz a sistematizat teoria funcțiilor generalizate, cuprinzînd unitar toate abordările anterioare, bazîndu-se pe teoria spațiilor vectoriale topologice și obține multe rezultate importante și cu consecințe deosebite. Neobișnuit de repede după apariția „Teoriei distribuțiilor", în fapt în doi sau trei ani, distribuțiile au căpătat o largă popularitate. Este suficient să remarcăm faptul că numărul lucrărilor matematice conținînd distribuții a crescut considerabil.

În volumele acestei serii vom da o dezvoltare sistematică a teoriei funcțiilor generalizate și a unei serii întregi de probleme de analiză legate de ele. Autorii nu și-au stabilit însă ca țel de a aduna întreg materialul legat, într-o măsură mai mare sau mai mică de funcțiile generalizate.

Pe de altă parte, foarte multe din problemele considerate aici ar putea fi tratate și fără distribuții. Totuși noțiunea de funcție generalizată stabilește o legătură utilă între multe probleme ale analizei, analizei funcționale, teoriei ecuațiilor diferențiale, teoriei reprezentărilor grupurilor Lie local compacte și teoriei probabilităților. De aceea s-ar putea ca titlul „Funcții generalizate" dat întregii serii de volume de analiză funcțională să fie cel mai potrivit.

Să descriem pe scurt conținutul primelor patru volume ale seriei.

Primul volum este dedicat în esență aspectelor algoritmice ale teoriei funcțiilor generalizate. Primele sale două capitole reprezintă o introducere elementară în teoria distribuțiilor. În acest volum cititorul întîlnește multe aplicații ale distribuțiilor la diferite chestiuni de analiză. În cîteva locuri sînt date teoreme fără demonstrații, cu trimiteri la volumul al doilea. În acest volum se utilizează pe larg, alături de cartea lui L. Schwartz, și articolul lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro „Funcții omogene" (U.M.N., 1955, nr. 3). Z. Ia. Șapiro a redactat de asemenea cîteva puncte ale acestui volum.

În volumul al doilea se dezvoltă noțiunile, introduse în primul volum, se demonstrează folosind metode topologice, acele teoreme date fără demonstrații în primul volum și, de asemenea, se consideră și se studiază o mare varietate de spații concrete de funcții generalizate. La baza tuturor acestora se găsește studiul făcut în capitolul I al celui de-al doilea volum al uneia dintre cele mai elementare și utile, pentru analiști, ramuri ale teoriei generale a spațiilor vectoriale topologice — teoria spațiilor numărabil normate.

Al treilea volum este dedicat anumitor aplicații ale teoriei funcțiilor generalizate la teoria ecuațiilor diferențiale și anume la construcția claselor de unicitate și a claselor de corectitudine a problemei Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale și la dezvoltarea după funcțiile proprii ale operatorilor diferențiali. Aici se folosesc sistematic rezultatele obținute în al doilea volum.

În volumul al patrulea se consideră probleme ale teoriei probabilităților (procese aleatoare generalizate) și ale teoriei reprezentărilor grupurilor Lie, legate de teoria funcțiilor generalizate. Conceptul unificator îl joacă analiza armonică (analogul teoriei transformatei Fourier) a funcțiilor generalizate și, în particular, problema reprezentării funcțiilor pozitiv definite. În acest volum un rol esențial îl are teorema nucleelor a lui L. Schwartz.

Volumele 1—3 au fost scrise de G. E. Șilov și de mine, volumul 4 de N. Ia. Vilenkin și de mine.

Într-o „Notă bibliografică" se dau anumite referințe istorice, citarea de surse și bibliografie. În text nu se fac referiri; indicațiile referitoare la manuale se dau în notele de subsol.

Bineînțeles că aceasta nici pe departe nu epuizează toate posibilitățile de aplicare ale funcțiilor generalizate. Fără îndoială se simte necesitatea aprofundării legăturii cu ecuațiile diferențiale (probleme la limită, ecuații cu coeficienți variabili, o serie de probleme ale ecuațiilor cvasiliniare).

Mai mult, teoria funcțiilor generalizate este baza cea mai potrivită pentru edificarea teoriei generale a reprezentărilor grupurilor Lie și, în particular, teoria generală a funcțiilor sferice și a funcțiilor automorfe generalizate. Sperăm să putem aduce unele contribuții și în aceste probleme.

Autorii primului volum își exprimă gratitudinea colegilor și studenților lor care într-un fel sau altul au contribuit la realizarea acestui volum, îndeosebi lui V. A. Borovikov, N. Ia. Vilenkin, M.I. Graev și Z. Ia. Șapiro. Autorii mulțumesc de asemenea lui M. S. Agranovici care a editat manuscrisul și a introdus o serie de îmbunătățiri.

I. M. GELFAND

Prefață la a doua ediție în limba rusă a primului volum

În a doua ediție a primului volum s-au făcut unele permutări ale materialului expus, pentru a ușura citirea sa.

Primele două capitole „Definiția și proprietățile elementare ale distribuțiilor" și „Transformata Fourier a distribuțiilor" se pot recomanda ca o introducere inițială, ele conțin minimul standard, necesar tuturor matematicienilor și fizicienilor care au de-a face cu distribuții.

Planul ulterior de studiu depinde de interesul cititorului. Cititorul interesat în aspectul algoritmic poate să se întoarcă la capitolul III al acestui volum, care este dedicat studiului unor clase speciale de distribuții: distribuția delta pe suprafețe de diferite dimensiuni, distribuții legate de forme pătratice (de signatură arbitrară), distribuții omogene și distribuții definite de funcții echivalente cu funcții omogene, precum și la începutul capitolului IV din volumul 4, în care se consideră distribuții omogene în domeniul complex. Cititorului interesat în teoria generală îi recomandăm, după primele două capitole ale acestui volum, să treacă la primele trei capitole ale volumului 2 ce conțin, în particular, necesarul privind teoria spațiilor vectoriale topologice, iar apoi la capitolul 1 al volumului 4, în care se studiază spațiile nucleare și măsurile definite pe acestea. Cititorul dornic să învețe despre aplicațiile funcționalilor generalizate în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, se poate întoarce spre capitolele II și III ale volumului 3, după o examinare a capitolelor referitoare la spațiile de tip S și de tip W (cap. IV al vol. 2, și cap. I al vol. 3). Teoria spectrală și aplicațiile sale sînt considerate în capitolul IV, vol. 3 și în capitolul I, vol. 4; pentru aceasta este necesară cunoașterea primelor două capitole ale volumului 2.*

Sînt posibile și alte planuri de studiu; de pildă, problemele ce se concentrează în jurul transformării Fourier a funcțiilor generalizate

* Această parte figurează în traducerea în limba română drept anexa 4. (Nota trad.)

sînt dezvoltate, după capitolul II, vol. 1 și capitolele III și IV al volumului 2, în primele 3 capitole al volumului 3, în capitolul al doilea și în următoarele din volumul 4; cum intervin funcțiile generalizate în teoria reprezentărilor și în teoria transformatei Fourier pe grupuri este expus în ultimele trei capitole ale volumului 4, pentru citirea cărora este necesar doar cunoașterea primelor două capitole ale volumului 1.

Pentru a ușura utilizarea primului volum, s-a dat la sfîrșitul său un rezumat al definițiilor și formulelor fundamentale, precum și un tabel de transformate Fourier de distribuții.

AUTORII

Notă privind terminologia și notația

Atragem atenția cititorului că în acest tratat autorii utilizează o terminologie și uneori notații care le sînt proprii. Ca atare, dorim să stabilim la ce corespund acestea în terminologia actualmente unanim acceptată.

În primul rînd, autorii utilizează sistematic termenul de funcții generalizate, înțelegînd prin aceasta o funcțională liniară și continuă pe un spațiu de funcții test (funcțiile test fiind denumite de autori funcții fundamentale, iar spațiile de funcții test, spații fundamentale). Termenul foarte general de funcție generalizată are, în cazuri particulare deosebit de importante, corespondenți mult mai des utilizați. Astfel am preferat pentru elementele lui K' terminologia unanim acceptată a lui L. Schwartz de distribuție. De asemenea, dacă Φ este un spațiu fundamental, astfel încît spațiul K să fie dens în Φ, topologia lui K fiind mai fină decît cea indusă de topologia lui K, are loc o scufundare injectivă continuă a dualului Φ' în K'. Ca atare, elementele lui Φ' vor fi numite de asemenea distribuții. Exemple tipice ale acestei situații le oferă spațiile S și $\mathcal{E}$, ale căror duale S′ (distribuțiile temperate) și $\mathcal{E}'$ (distribuțiile cu suport compact) sînt natural scufundate în K'. Menționăm de asemenea, că spațiul K este notat de obicei prin $\mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$ sau prin $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, iar spațiul funcțiilor indefinit derivabile pe $\mathbf{R}^n$ se notează cu $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ sau $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Pentru celelalte duale de spații fundamentale păstrăm terminologia autorilor. Subiniem însă că adesea în loc de funcție generalizată se utilizează în literatura de specialitate termenul de ultradistribuție (precizînd de la caz la caz dualul în cauză).

Autorii folosesc termenul de funcție finită înțelegînd prin aceasta funcție cu suport compact. Au adoptat sistematic terminologia uzuală. De asemenea, ei folosesc termenul de funcție sau de funcție generalizată „concentrată pe o mulțime". Aceasta înseamnă că funcția, res-

pectiv funcţia generalizată are suportul conţinut în acea mulţime. Termenul de „concentrat" fiind foarte sugestiv l-am utilizat adesea în cazul distribuţiilor (de pildă, distribuţie concentrată pe o suprafaţă)

De asemenea, autorii utilizează termenul de suprafaţă pentru ceea ce se numeşte de obicei hipersuprafaţă (adică avînd codimensiunea unu). Avînd în vedere că nu există pericol de confuzii vom face şi noi acelaş abuz care simplifică scrierea. Termenul de suprafaţă trebuie înţeles aici în sensul geometriei algebrice, adică cu posibile singularităţi (dacă nu se menţionează în mod expres contrariul). Analog, termenul utilizat cîteodată de varietate trebuie înţeles în sensul anglo-saxon de „variety", adică de mulţime analitică şi nu în sensul de „manifold" adică de varietate diferenţiabilă. Acest abuz de limbaj este utilizat numai pentru a simplifica exprimarea. În ceea ce priveşte formele diferenţiale, autorii utilizează pentru produsul exterior a două forme u, v notat de obicei $u \wedge v$, notaţia mai simplă $u \cdot v$. Am păstrat notaţia originală. Autorii folosesc termenul de funcţională hermitiană în două sensuri diferite: atît în sensul larg de formă seschiliniară cît şi în sensul strict al termenului. În traducere s-a făcut distincţia necesară. Adesea, în cazul distribuţiilor (sau al funcţiilor generalizate) regulate, adică definite de anumite funcţii uzuale, autorii nu au făcut distincţia între funcţia respectivă şi distribuţia pe care aceasta o defineşte; acolo unde nu era pericol de confuzie am păstrat această identificare.

Alt abuz de limbaj utilizat cîteodată este următorul: se consideră distribuţii depinzînd analitic de un parametru λ complex, în fapt, funcţii analitice de λ avînd valori distribuţii. Atunci cînd ne interesează dependenţa distribuţiei de parametrul λ, de pildă cînd este vorba de o dezvoltare după puterile lui λ vom scrie „dezvoltarea funcţiei" şi nu „dezvoltarea funcţiei de λ cu valori distribuţii", acest abuz neputînd crea confuzii.

Autorii folosesc termenul de continuitate, înţelegînd continuitatea prin şiruri. În traducere, am folosit de asemenea, termenii sinonimi de regularizata unei integrale sau de valoare regularizată a unei integrale, de la caz la caz.

Traducătorii

Capitolul I

DEFINIŢIA DISTRIBUŢIILOR ŞI PROPRIETĂŢI ELEMENTARE

§ 1. Funcţii test şi distribuţii

1.1. **Observaţii introductive.** De multă vreme fizicienii utilizau aşa-numitele funcţii singulare, care nu pot fi definite corect în cadrul teoriei clasice a funcţiilor.

Funcţia singulară cea mai simplă este funcţia delta, $\delta(x - x_0)$: aceasta, conform definiţiei fizicienilor este „egală cu zero peste tot, cu excepţia punctului x_0, în acest punct este egală cu infinit şi posedă o integrală egală cu 1". Este inutil de arătat că aceste condiţii sînt incompatibile cu definiţiile clasice ale funcţiei şi ale integralei. Dar putem încerca să analizăm conceptul de funcţie singulară şi să clarificăm sensul său real. Mai întîi, să remarcăm că în rezolvarea problemelor concrete de fizică matematică, funcţia delta (şi alte funcţii singulare) nu se întîlnesc, de regulă, decît în etape intermediare; în rezultatul final, sau funcţia singulară nu apare, sau dacă intervine ea figurează sub semnul integralei, înmulţită cu o funcţie „ce se comportă bine". Din acest motiv nu este nevoie să răspundem la întrebarea: „ce sînt funcţiile singulare?" ci este suficient să ştim ce înseamnă integrala produsului dintre o funcţie singulară cu o funcţie „bună". De pildă, în loc de a ne întreba care este natura funcţiei δ, este suficient de indicat că, pentru orice funcţie $\varphi(x)$, „suficient de bună", avem egalitatea

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(x_0).$$

Altfel spus, fiecărei funcţii singulare îi ataşăm o funcţională, astfel încît, fiecărei funcţii „suficient de bune" îi corespunde un număr, perfect definit. De exemplu, funcţiei delta $\delta(x - x_0)$ îi ataşăm funcţionala care fiecărei funcţii „suficient de bune" $\varphi(x)$ îi face să corespundă valoarea $\varphi(x_0)$. Dar dacă procedăm astfel, nu mai este

nevoie să ne aplecăm asupra conceptului de „funcție singulară"; vom identifica de acum încolo „funcția singulară" cu funcționala atașată ei. Aceasta va fi o definiție suficientă (atîta vreme cît am definit precis clasa funcțiilor „suficient de bune" pe care este dată această funcțională). Funcțiile integrabile uzuale sînt evident incluse în acest cadru : pentru fiecare astfel de funcție f știm cît este integrala produsului dintre f și o funcție „bună". În acest mod, reprezentarea distribuțiilor sub forma de funcționale, include atît „funcțiile singulare" cît și funcțiile uzuale.

Să trecem acum la definiții precise.

1.2. **Funcții test.** Mai întîi trebuie caracterizate funcțiile pe care le numim „suficient de bune" și pe care acționează funcționalele noastre. Pentru aceasta considerăm mulțimea K a funcțiilor reale $\varphi(x)$*, cu suport compact (adică anulîndu-se în afara unei mulțimi compacte, ce depinde de funcția considerată), indefinit derivabile. Aceste funcții vor fi numite *funcții test*, și mulțimea K se va numi *spațiul de bază*. Adunarea funcțiilor test, precum înmulțirea cu numere reale a funcțiilor test nu ne scoate din clasa K ; altfel spus, K este un spațiu vectorial.

Vom spune că șirul

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_\nu(x),\ \ldots$$

de funcții test tinde către zero în K, dacă toate aceste funcții se anulează în afara unui compact (același pentru toate) și dacă ele converg uniform către zero (în sensul uzual) împreună cu derivatele lor de orice ordin. Ca exemplu de funcție test anulîndu-se pentru $r = |x| = \sqrt{\sum x_i^2} \geqslant a$, se poate da funcția

$$(1)\qquad \varphi(x, a) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - r^2}\right) & \text{pentru } r < a \\ 0 & \text{pentru } r > a. \end{cases}$$

Șirul funcțiilor $\varphi_\nu(x) = \dfrac{1}{\nu}\,\varphi(x, a)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ tinde către zero în spațiul K. Șirul $\varphi_\nu(x) = \dfrac{1}{\nu}\,\varphi\left(\dfrac{x}{\nu},\ a\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ converge către zero uniform împreună cu toate derivatele sale, dar el nu tinde către 0 în K, căci nu există niciun compact în afară căruia să se anuleze toate aceste funcții.

* De regulă, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ desemnează un punct al spațiului n-dimensional $\mathbf{R}^n$. Cititorul poate, la prima lectură, considera x ca un punct pe dreapta reală.

Există foarte multe funcții test. De exemplu (v. Anexa 1 a acestui capitol, nr. 1) pentru orice funcție continuă cu suport compact există întotdeauna o funcție $\varphi(x)$ din K ce o aproximează oricît de bine, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\varphi \in K$ astfel că, pentru orice x,

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

1.3. **Distribuții.** Spunem că ne-am dat o *funcțională liniară continuă* f pe spațiul K dacă avem o regulă care atribuie fiecărei funcții test $\varphi(x)$ un număr (f, φ) astfel încît să fie verificate următoarele condiții :

a) Pentru orice două numere reale α_1, α_2 și orice două funcții test $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are loc egalitatea $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$ (proprietatea de liniaritate a funcționalei f) ;

b) Dacă șirul funcțiilor test $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu \ldots$ tinde către zero în spațiul K, atunci șirul numerelor (f, φ_1), $(f, \varphi_2), \ldots, (f, \varphi_\nu), \ldots$ tinde către zero (proprietatea de continuitate a funcționalei f).

De exemplu, fie dată o funcție $f(x)$, absolut integrabilă pe orice domeniu compact din spațiul $\mathbf{R}^n$ (o astfel de funcție se numește local integrabilă). Cu ajutorul acestei funcții putem atașa fiecărei funcții test $\varphi(x)$ numărul :

$$(1)\qquad (f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x,$$

unde integrarea se efectuează de fapt, pe un compact, în afara căruia funcția $\varphi(x)$ se anulează identic. Este ușor de verificat că funcționala f îndeplinește condițiile a) și b) ; de pildă, faptul că condiția b) este îndeplinită rezultă din posibilitatea trecerii la limită sub semnul integral în cazul unui șir de funcții uniform convergent pe un compact. Funcționala de forma (1) este deci un exemplu foarte particular de funcțională liniară continuă pe spațiul K. Sînt ușor de găsit funcționale de altă formă. De pildă, funcționala care face să-i corespundă oricărei funcții $\varphi(x)$ valoarea sa în punctul $x_0 = 0$ este în mod evident liniară și continuă. Dar este ușor de arătat că această funcțională nu poate fi reprezentată sub forma (1), oricum am alege funcția local integrabilă $f(x)$.

Într-adevăr, să presupunem că există o funcție local integrabilă $f(x)$, astfel încît, pentru orice funcție test $\varphi(x)$ are loc egalitatea

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

În particular, această reprezentare are loc și pentru funcția $\varphi(x, a)$, considerată în punctul precedent egală cu $\exp(-a^2/(a^2 - r^2))$ pentru $r < a$ și nulă pentru $r > a$.

$$(2) \qquad \int_{R^n} f(x)\ \varphi(x, a)\ dx = \varphi(0, a) = e^{-1}$$

Dar pentru $a \to 0$ integrala din membrul stîng tinde către zero, ceea ce contrazice egalitatea (2). Funcționala considerată o vom numi „funcția delta" în concordanță cu terminologia stabilită (deși aceasta nu este corectă, pentru că funcția delta nu este o funcție în sensul clasic) și o vom nota prin $\delta(x)$; astfel

$$(\delta(x),\ \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Adesea se întîlnește și funcția delta „translatată", $\delta(x - x_0)$, definită prin egalitatea

$$(\delta(x - x)_0,\ \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

Vom numi *distribuție* orice funcțională liniară continuă definită pe spațiul funcțiilor test K. O distribuție dată de o formulă de forma (1) se va numi *regulată* — sau de tip funcție, toate celelalte (printre care și funcția delta) — *singulare*.

O distribuție regulată f, definită prin formula *

$$(f, \varphi) = C\int \varphi(x)\,dx = \int C\,\varphi(x)\,dx$$

se va numi *constanta* C. De exemplu, distribuția *unitate* este dată de formula

$$(1, \varphi) = \int \varphi(x)\ dx.$$

Se poate arăta (v. vol. 2, cap. II, § 1, și pct. 5) că valorile unei funcționale regulate pe toate funcțiile test permit definirea funcției corespunzătoare $f(x)$, în mod unic cu excepția unei mulțimi de măsură nulă. Aceasta înseamnă că la *funcții diferite* $f_1(x)$ și $f_2(x)$ *corespund distribuții diferite* (adică avînd valori diferite pentru unele funcții test). Din acest motiv mulțimea tuturor funcțiilor local integrabile poate fi considerată ca o parte din mulțimea tuturor distribuțiilor. Tot din

* Este vorba de integrarea pe întreg spațiul și în acest caz simbolul R^n sub semnul integralei lipsește.

același motiv este cîteodată comod de a păstra pentru distribuții notația $f(x)$, ca de exemplu pentru funcția delta, deși nu se poate vorbi despre valoarea unei distribuții în puncte diferite (căci scrierea $f(x_0)$, pentru o distribuție, nu are sens în general). De asemenea, în loc de (f, φ) vom scrie cîteodată $\int f(x)\ \varphi(x)\ dx$, deși din punct de vedere al analizei clasice o astfel de notație nu are, în general, sens. De exemplu, vom scrie cîteodată în loc de $(\delta(x),\ \varphi(x))$, $\int \delta(x)\,\varphi(x)\,dx$. Astfel, $\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Mulțimea tuturor distribuțiilor se va nota cu K'*.

1.4. **Proprietăți locale ale distribuțiilor.** Știm deja că nu putem vorbi despre valoarea unei distribuții într-un punct. De exemplu nu se poate spune că distribuția f „este nulă în punctul x_0". Dar expresia „distribuția f este nulă în vecinătatea U a punctului x_0" are un sens precis: anume aceasta înseamnă că pentru orice funcție test $\varphi(x)$ diferă de zero doar în punctele frontieră ale vecinătății U, are loc egalitatea $(f, \varphi) = 0$. Astfel, distribuția f, corespunzînd funcției uzuale $f(x)$, este egală în zero în vecinătatea U a punctului x_0, dacă în această vecinătate se anulează (aproape peste tot) funcția $f(x)$ însăși. Distribuția singulară $\delta(x - x_1)$ este nulă într-o anumită vecinătate a oricărui punct $x_0 \neq x_1$.

Convenim a spune că distribuția f este nulă pe o mulțime deschisă G, dacă ea este nulă în vecinătatea fiecărui punct al mulțimii G. Se poate arăta (v. Anexa 1) că o distribuție nulă în vecinătatea oricărui punct este nulă, adică pentru orice funcție test $\varphi(x)$:

$$(f, \varphi) = 0.$$

Dacă distribuția f nu este nulă în nici o vecinătate a punctului x_0, atunci se zice că x_0 este punct esențial al funcționalei f. Astfel, de exemplu, pe dreaptă punctul $x_0 = 0$ este punct esențial pentru funcționala $f(x) = x^2$ (deși în acel punct funcția x^2 se anulează!). Este limpede că și toate celelalte puncte ale axei sînt esențiale pentru $f(x) = x^2$. Mulțimea tuturor punctelor esențiale se numește *suportul* distribuției f. Suportul distribuției f, corespunzînd funcției uzuale continue (sau continuă pe porțiuni) $f(x)$ este aderența mulțimii punctelor în care $f(x) \neq 0$. Suportul distribuției $\delta(x - x_0)$ este x_0. Dacă

* Notația uzuală, unanim acceptată, este D' (Nota trad.).

mulțimea F conține suportul funcționalei f, atunci se mai spune că f este *concentrată pe mulțimea* F.

Denumirea de „punct esențial" se justifică prin următoarele proprietăți (care vor fi demonstrate în pct. 3 al anexei 1): dacă funcția test $\varphi(x)$ se anulează într-o vecinătate a suportului funcționalei f, atunci $(f, \varphi) = 0$. De aici rezultă că orice modificare a funcției test în afara unei vecinătăți a suportului distribuției f nu influențează valoarea lui (f, φ); într-adevăr, modificarea amintită este echivalentă cu adunarea la funcția test φ a unei alte funcții test ψ nule în vecinătatea suportului funcționalei f, deci pentru care $(f, \psi) = 0$, și prin urmare $(f, \varphi + \psi) = (f, \varphi)$.

Trecem acum la compararea locală a două distribuții oarecare. Vom spune că distribuțiile f și g *coincid pe mulțimea deschisă* G, dacă diferența $f-g$ este nulă pe această mulțime. Se poate arăta că dacă f și g coincid în vecinătatea fiecărui punct, atunci ele coincid și global, adică $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ pentru orice φ; rezultă din aceasta că o distribuție este perfect determinată de proprietățile sale locale. Mai mult, putem găsi orice distribuție plecînd de la valorile sale locale (anexa 1, pct. 3).

În particular, vom spune că distribuția f este *regulată* în domeniul G, dacă în acest domeniu ea coincide cu o funcție local integrabilă. De exemplu, funcția delta $\delta(x - x_0)$ este regulată în afara punctului x_0 (și egală cu zero).

Una dintre problemele importante ale teoriei distribuțiilor constă în următoarele: dîndu-se o funcție (uzuală) $f(x)$, care în general nu este local integrabilă, de exemplu $\frac{1}{x}$ pe dreaptă, există oare o distribuție f coincizînd cu $f(x)$ în toate punctele în care $f(x)$ este local integrabilă? Se poate construi o aplicație $f(x) \to f$ astfel încît operațiile obișnuite de adunare, înmulțire, diferențiere, pe care le definim în continuare și pentru distribuții să se păstreze prin această aplicație? Este clar că un răspuns pozitiv la asemenea chestiuni este foarte important: el ar permite includerea în cadrul distribuțiilor și a funcțiile uzuale avînd singularități neintegrabile. La aceste chestiuni avem pînă în prezent doar răspunsuri parțiale (v. pct. 7, § 1 și § 3).

1.5. **Operațiile de adunare și de înmulțire cu un număr și cu o funcție.** Fie date două distribuții f și g; definim *suma* $f + g$ ca funcționala pe spațiul K, definită prin formula

$$(f + g) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Este ușor de arătat că funcționala $f + g$ definită de această formulă este o funcțională liniară continuă. În particular dacă f și g sînt funcționale regulate, corespunzînd funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$, atunci $f + g$ este de asemenea o funcțională regulată, corespunzînd funcției $f(x) + g(x)$. Acest fapt arată că definiția sumei distribuțiilor este naturală.

Produsul distribuției f cu numărul α este definit de formula

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi).$$

Este evident că această funcțională este liniară și continuă. Pentru o funcțională regulată f, corespunzînd unei funcții local integrabile $f(x)$ operația introdusă mai sus corespunde înmulțirii funcției $f(x)$ cu numărul α.

Nu este posibil de a defini în nici un mod natural produsul a două distribuții. Dar se definește perfect natural *produsul unei distribuții oarecare f cu o funcție indefinit derivabilă $a(x)$*. Remarcăm mai întîi că produsul dintr-o funcție indefinit derivabilă $a(x)$ cu o funcție test $\varphi(x)$ este de asemenea o funcție test $\psi(x) = a(x)\,\varphi(x)$; în plus, dacă șirul de funcții test $\varphi_\nu(x)$ tinde către zero în spațiul K, atunci șirul produselor $a(x)\,\varphi_\nu(x)$ de asemenea tinde către zero în spațiul K. Fie acum dată o distribuție arbitrară f; definim funcționala af prin formula

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi).$$

Funcționala af este evident liniară. Ea este și continuă: dacă $\varphi_\nu(x) \to 0$ atunci, cum s-a arătat, și $a(x)\,\varphi_\nu(x) \to 0$ și prin urmare:

$$(af, \varphi_\nu) = (f, a\varphi_\nu) \to 0.$$

Pentru o funcțională regulată f, corespunzînd unei funcții local integrabile $f(x)$, înmulțirea cu funcția $a(x)$ corespunde înmulțirii funcției $f(x)$ cu funcția $a(x)$. Într-adevăr, în acest caz avem:

$$(af, \varphi) = (f, a, \varphi) = \int f(x)\,[a(x)\,\varphi(x)]\,dx = \int [a(x)\,f(x)]\,\varphi(x)dx.$$

1.6. **Translații, rotații și alte transformări liniare efectuate asupra variabilelor independente.** Pentru $h > 0$ funcția $f(x - h)$ pe axă se numește în analiză *translatata la dreapta cu h a funcției $f(x)$*. Atragem atenția că această operație revine la a efectua o *translație la stînga* cu h a variabilei independente.

Putem generaliza această transformare în cazul funcțiilor de n variabile, în modul următor. Fie u o transformare liniară inversabilă în spațiul $\mathbf{R}^n$ și u^{-1} transformarea inversă. Definim în acest caz operatorul u corespunzător, în spațiul funcțiilor $f(x)$ prin formula

$$uf(x) = f(u^{-1}\,x). \tag{1}$$

Operatorul u se poate generaliza și la distribuții. Remarcăm, mai întîi, că odată cu fiecare funcție test $\varphi(x)$ și funcția $\varphi(ux)$ este de asemenea o funcție test. Apoi să vedem la ce egalitate între funcționale revine egalitatea (1). Presupunînd că $f(x)$ este local integrabilă și aplicînd această egalitate funcției test $\varphi(x)$, găsim :

$$(uf(x),\ \varphi(x)) = (f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) = \int f(u^{-1}x)\ \varphi(x)\,dx.$$

Să efectuăm în integrala obținută astfel schimbarea de variabile $u^{-1}x = y$, adică $x = uy$, $dx = |u|\,dy$, unde $|u|$ este determinantul transformării u. Obținem :

$$(uf,\ \varphi) = |u| \int f(y)\ \varphi(uy)\,dy = |u|\,(f(x),\ \varphi(ux)).$$

Această egalitate furnizează definiția operatorului u, aplicabilă acum tuturor distribuțiilor : uf este funcționala definită de formula

$$(uf,\ \varphi) = |u|\,(f,\ \varphi(u\,x)). \tag{2}$$

Funcționala uf se poate nota de asemenea și prin $f(u^{-1}x)$ (ca pentru funcții) ceea ce cîteodată face formulele mai clare. În virtutea convențiilor noastre de scriere (v. sfîrșitul pct. 1.3) putem scrie în loc de (2)

$$\int f(u^{-1}x)\ \varphi(x)\,dx = |u| \int f(x)\ \varphi(ux)\,dx, \tag{2'}$$

unde f este o distribuție oarecare.

Deosebit de simplă este formula ce se obține în cazul transformărilor unimodulare ($|u| = 1$), în particular pentru rotații :

$$(f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) \equiv (uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(ux)). \tag{3}$$

Exemple de operații.

1. Translația prin vectorul h : $ux = x + h$. Translația distribuției f prin vectorul h este dată de formula

$$(uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(ux)) = (f,\ \varphi(x + h)).$$

Această formulă se poate scrie sub forma :

$$(f(x - h),\ \varphi) = (f,\ \varphi(x + h)),$$

sau

$$\int f(x - h)\ \varphi(x)dx = \int f(x)\ \varphi(x + h)\,dx.$$

2. Simetria față de originea coordonatelor : $ux = -x$. Simetria distribuției f este dată de formula

$$(f(-x),\ \varphi(x)) = (uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(-x)),$$

sau

$$\int f(-x)\ \varphi(x)\,dx = \int f(x)\ \varphi(-x)\,dx.$$

3. Omotetia : $ux = \alpha x$. Transformata prin omotetie a distribuției f este dată de formula.

$$(f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) \equiv (uf,\ \varphi) = \alpha^n(f(x),\ \varphi(\alpha x)).$$

Distribuția f se numește bineînțeles invarianta față de operatorul u dacă $uf = f$.

De pildă, distribuția f poate fi invariantă în raport cu simetria față de origine (adică să verifice ecuația $(f,\ \varphi(-x)) = (f,\ \varphi)$; ea desigur va fi numită central simetrică. Distribuțiile invariante la toate rotațiile vor fi numite cu simetrie sferică. Ca exemplu de astfel de distribuții se pot da toate distribuțiile regulate, ce corespund unor funcții ce depind doar de $r = (\sum x_j^2)^{1/2}$ și de asemenea distribuția δ. Distribuțiile invariante la translația de vector h vor fi numite periodice, de perioadă h. Se poate arăta că o distribuție invariantă la toate translațiile este constantă (v. § 2, pct. 6).

Distribuția f, verificînd ecuația

$$f(\alpha x) = \alpha^{\lambda}(f\ x) \tag{4}$$

pentru orice număr real $\alpha > 0$ se va numi bineînțeles omogenă de grad λ. Condiția (4) poate fi scrisă și sub forma :

$$\alpha^{-n}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda}(f(x),\ \varphi(x))$$

sau, de asemenea

$$\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f(x),\ \varphi(x)).$$

Astfel $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ este o distribuție de grad $-n$. De asemenea, funcțiile omogene uzuale (local integrabile) definesc distribuții omogene de același grad de omogenitate. Vom studia mai amănunțit distribuțiile omogene în § 4 și apoi în capitolul III.

1.7. **Problema regularizării integralelor divergente.** Fie f o funcție local integrabilă peste tot, cu excepția punctului x_0, în acest punct având o singularitate neintegrabilă (de pildă $f(x) = \frac{1}{x}$, pe axa reală). Atunci integrala

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

unde $\varphi(x)$ este o funcție test, va diverge, în general. Dar ea va converge dacă $\varphi(x)$ este identic nulă în vecinătatea punctului x_0. Ne punem întrebarea: nu se poate defini o funcțională $f \in K'$ care să fie definită cu ajutorul formulei (1) pentru acele funcții test ce se anulează identic în vecinătatea punctului x_0? Orice astfel de funcțională se numește *regularizata integralei divergente* (1) (sau regularizata lui $f(x)$).

Astfel, pentru $f(x) = \frac{1}{x}$ putem pune

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx + \int_{b}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \tag{2}$$

în orice a, $b > 0$.

Se poate da o formă oarecum diferită a definiției regularizării: regularizata funcției $f(x)$ este o funcțională liniară continuă f care coincide cu $f(x)$ peste tot, cu excepția punctului x_0 (v. pct. 4).

Într-adevăr, dacă avem o funcțională f care pentru toate funcțiile test $\varphi(x)$ identic nule în vecinătatea punctului x_0, este dată de integrala (1), atunci f coincide cu funcția $f(x)$ într-o vecinătate a oricărui punct $x_1 \neq x_0$, anume în orice vecinătate pentru care x_0 să nu fie punct aderent. Pe de altă parte, dacă funcționala f coincide cu funcția $f(x)$ peste tot cu excepția punctului x_0, atunci pentru orice funcție test ce se anulează identic într-o vecinătate a punctului x_0, are loc formula (1) și, prin urmare, f definește o regularizată a funcției $f(x)$.

Să facem cîteva observații generale, în legătură cu rezolvarea problemei regularizării. Pentru a simplifica, luăm $x_0 = 0$.

1° *Dacă pentru un anumit $m > 0$ funcția $f(x) \cdot r^m$ este local integrabilă, atunci integrala* (1) *admite o regularizată.*

Într-adevăr, în acest caz, putem construi regularizata f cu ajutorul formulei

$$(f, \varphi) = \int f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\varphi(0) + \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial_m \varphi(0)}{\partial x_n^m} \frac{x_n^m}{m!} \right] \theta(1 - r) \right\} dx \tag{3}$$

(din funcția $\varphi(x)$ se îndepărtează exact atîția termeni din dezvoltarea sa Taylor pentru ca restul să fie de ordin mai mare ca r^m). Funcția $\theta(1 - r)$ este egală cu 1 pentru $r < 1$, nulă pentru $r > 1$.

Este evident că integrala (3) converge oricare ar fi $\varphi(x)$ și că este o funcțională liniară continuă. Dacă funcția $\varphi(x)$ este nulă în vecinătatea originii, atunci expresia (3) devine

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx,$$

și astfel funcționala f este identică cu funcția $f(x)$ în afara originii. În cazul considerat problema regularizării are deci o soluție.

2° *Dacă f_0 este o soluție particulară a problemei regularizării integralei* (1), *atunci soluția generală f se obține adăugînd lui f_0 o funcțională liniară oarecare avînd suportul redus la punctul x_0.*

Într-adevăr, fie f_0 regularizata, iar g o funcțională concentrată în acel punct. Atunci pentru funcțiile test $\varphi(x)$ identic nule în vecinătatea punctului $x_0 = 0$:

$$(f_0 + g_1, \varphi) = (f_0, \varphi) + (g, \varphi) = (f_0, \varphi),$$

și astfel $f_0 + g$ este o regularizată. Reciproc, dacă f_0 și f_1 sînt două regularizate, atunci pentru orice funcție test $\varphi(x)$ nulă în origine, avem:

$$(f_1 - f_0, \varphi) = (f_1, \varphi) - (f_0, \varphi) = 0,$$

adică diferența $f_1 - f_0$ este concentrată în $x_0 = 0$.

De pildă, în cazul $f(x) = \frac{1}{x}$ diferența a două regularizate definite de formula (2) este, după cum se poate ușor deduce din însăși formula amintită, $C\delta(x)$, unde C este o constantă.

Vom examina în § 3 problema alegerii dintre numeroasele regularizate posibile ale unei funcții date pe cea care ar putea fi considerată ca regularizata sa naturală.

3° *Dacă într-un anumit unghi solid cu vîrful în originea coordonatelor funcția $f(x)$ verifică inegalitatea*

$$f(x) \geqslant F(r), \tag{4}$$

unde $F(r)$ crește mai repede decît orice putere a lui $1/r$ pentru $r \to 0$, atunci integrala (1) nu admite regularizate.

Pentru simplitate, presupunem că unghiul solid despre care este vorba conține domeniul $H = (x_1 > 0, \ldots, x_n > 0)$. În cazul general demonstrația se face în mod asemănător. Considerăm o funcție test $\varphi(x)$, nenegativă, anulîndu-se identic pentru $|x| \geqslant 1$, și cu integrala egală cu 1. Fie apoi $\varepsilon_\nu > 0$, un șir de numere tinzînd către zero mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{\nu}$. Funcția $\psi_\nu(x)$ obținută din funcția $\varepsilon_\nu \varphi_\nu(x)$ deplasată cu $\sqrt{n}/\nu$ de-a lungul bisectoarei $x_1 = \ldots = x_n$ se anulează identic în afara domeniului H și, pentru ν suficient de mare, este identic nulă în afara intersecției lui H cu o bilă cu rază suficient de mică, centrată în origine. Șirul de funcții $\psi_\nu(x)$ converge, pentru $\nu \to \infty$ către 0 în spațiul K, după cum ușor se poate vedea. Deci dacă ar exista o funcțională f care să regularizeze integrala (1), ar trebui să avem

$$(f, \varphi_\nu) \to 0. \tag{5}$$

Dar cum funcția $\psi_\nu(x)$ se anulează identic în vecinătatea punctului $x = 0$, iar în afara originii funcționala f coincide cu funcția $f(x)$, verificînd inegalitatea (4), avem:

$$(f, \psi_\nu) = \int f(x)\, \psi_\nu(x)\, dx \geqslant \varepsilon_\nu \int F(r)\, \varphi(\nu x)\, dx.$$

Integrala funcției $\varphi(\nu x)$ fiind egală cu $\frac{1}{\nu^n}$, obținem astfel evaluarea

$$(f, \psi_\nu) > \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^n F\left(\frac{2}{\nu}\sqrt{n}\right)}. \tag{6}$$

Numerele ε_ν nu sînt încă fixate. Vom pune

$$\varepsilon_\nu = \frac{\nu^n}{F\left(\frac{2}{\nu}\sqrt{n}\right)} \tag{7}$$

și cum $F(r)$ crește mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{r}$, numerele ε_ν, date de (7) vor tinde către zero mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{r}$, așa cum trebuia. Dar în acest caz inegalitatea (6) arată că (f, ψ_ν) este mai mare decît 1 și prin urmare nu tinde către 0, în contradicție cu (5).

Din acest motiv, în cazul considerat, integrala (1) nu poate fi regularizată.

Observație. Acest rezultat nu trebuie să ne facă să credem că în analiza distribuțiilor ar trebui să nu considerăm funcții avînd singularități de grad mare. Noi nu am considerat pînă în prezent decît funcții test de tip special (spațiul K). Se pot utiliza numeroase alte spații de funcții test; pentru aceste spații se vor putea întotdeauna găsi unele pentru care funcțiile ce au singularități oricît de mari să aibă sens ca funcționale.

În concluzie, să remarcăm că se poate da o definiție analoagă regularizării în cazul în care $f(x)$ posedă nu doar unul, ci mai multe, sau chiar o infinitate numărabilă de puncte singulare izolate, cu proprietatea că acestea formează o mulțime local finită. O astfel de funcție $f(x)$ se poate scrie întotdeauna sub forma unei sume

$$f(x) = \sum f_k(x),$$

unde $f_k(x)$ posedă un singur punct singular (anexa 1, nr. 2). Din acest motiv studiul cazului cu o infinitate numărabilă de singularități izolate nu aduce nimic esențial nou.

1.8. **Trecerea la limită.** Prin definiție, șirul de distribuții $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ converge *către distribuția* f dacă pentru orice funcție test $\varphi(x)$:

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

Bineînțeles, putem considera și cazul în care indicele parcurge o mulțime continuă de valori, definiția trecerii la limită rămînînd aceeași.

Analog, se spune că seria de distribuții $h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu + \ldots$ *converge către distribuția* g dacă șirul sumelor parțiale ale acestei serii

$$g_1 = h_1, g_2 = h_1 + h_2, \ldots, g_\nu = h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu, \ldots$$

converge către distribuția g, în sensul indicat mai sus.

Este ușor de arătat că limita unui șir convergent de distribuții este definită în mod unic.

În plus, operația de trecere la limită este liniară: dacă $f = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu$ și și α un număr (sau o funcție indefinit derivabilă), atunci $\lim_{\nu \to \infty} \alpha f_\nu$ există și este egală cu $\alpha \lim_{\nu \to \infty} f_\nu = \alpha f$; dacă $f = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu$, $g = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu$, atunci $\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu + g_\nu)$ există și este egală cu $f + g$.

Dacă funcţiile local integrabile $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ converg uniform pe orice compact către o funcţie local integrabilă, atunci funcţionalele corespunzătoare f_ν converg către funcţionala regulată f. Într-adevăr, fie o funcţie test $\varphi(x)$ pe G — adică pe domeniul în afara căruia funcţia $\varphi(x)$ este identic nulă; atunci, în virtutea teoremei cunoscute despre trecerea la limită sub semnul integral,

$$(f_\nu, \varphi) = \int_G f_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx \to \int_G f(x)\,\varphi(x)dx = (f, \varphi),$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Dealtfel, condiţia privind convergenţa uniformă a funcţiilor $f_\nu(x)$ pe orice compact poate fi slăbită; posibilitatea trecerii la limită sub integrală este posibilă şi în condiţii mai puţin tari, ca de pildă:

a) $f_\nu(x) \to f(x)$ aproape peste tot, $|f_\nu(x)|$ uniform mărginite de o constantă (sau de o funcţie local integrabilă).

b) $f_\nu(x) \to f(x)$ monoton crescător sau descrescător, $f(x)$ local integrabilă.

Exemplu. Un şir de funcţionale regulate poate avea ca limită o funcţională singulară. Astfel, funcţionala

$$(f,\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

coincide, pentru $x \neq 0$ cu funcţia $\frac{1}{x}$, care nu este integrabilă pe nici o vecinătate a originii, şi ca atare nu este regulată. Dar din însăşi construcţia sa, această funcţională este limita (pentru $\varepsilon \to 0$) funcţionalelor regulate, corespunzînd funcţiilor, egale cu $\frac{1}{x}$ pentru $|x| > \varepsilon$ şi egale cu zero pentru $|x| < \varepsilon$.

În general, se poate deomonstra că orice funcţională singulară este limită de funcţionale regulate.

Este de asemenea uşor de arătat că *orice distribuţie este limită de distribuţii avînd suportul compact.*

Pentru a demonstra acest fapt, să considerăm o funcţie indefinit diferenţiabilă $g_\nu(x)$, identic egală cu 1 în bila $|x| \leqslant \nu$ şi nulă în afara bilei $|x| \leqslant 2\nu$. Oricare ar fi funcţia test φ, este evident că $g_\nu\varphi = \varphi$ începînd cu un anume ν. Rezultă de aici că pentru orice funcţională f, produsul $g_\nu f$ tinde către f; într-adevăr, pentru orice funcţie test avem $(g_\nu f, \varphi) = (f, g_\nu \varphi) = (f, \varphi)$ începînd cu un anumit ν, deci condiţia $(g_\nu f, \varphi) \to (f, \varphi)$ este verificată. Este clar că funcţionala $g_\nu f$ este

nulă în domeniul $|x| > 2\nu$ şi prin urmare este concentrată pe mulţimea mărginită $|x| < 2\nu$. Astfel, distribuţia f este limita distribuţiilor $g_\nu f$, cu suportul compact, adică ceea ce trebuia arătat.

Un fapt important îl constituie completitudinea spaţiului distribuţiilor, faţă de noţiunea de convergenţă introdusă. Cu alte cuvinte, dacă şirul funcţionalelor $f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots$ este astfel încît pentru orice funcţie test φ există limita şirului numeric (f_ν, φ), atunci această limită defineşte o funcţională liniară continuă pe spaţiul K. Demonstraţia acestei afirmaţii va fi dată în anexa de la finele acestui volum.

1.9. **Distribuţii şi funcţii test cu valori complexe.** Pînă în prezent am presupus că funcţiile test luau numai valorile reale, şi că valorile funcţionalei (f, φ) erau de asemenea reale.

Se pot defini şi distribuţii cu valori complexe. Pentru aceasta, vom trece de la spaţiul funcţiilor test reale la spaţiul funcţiilor test cu valori complexe (avînd suportul compact şi indefinit derivabile). Vom defini o *distribuţie complexă* orice funcţională liniară şi continuă pe acest nou spaţiu, putînd lua şi valori complexe. Fiecărei funcţii local integrabile $f(x)$, cu valori complexe, îi facem să corespundă funcţionala

$$(1) \qquad (f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx,$$

unde bara superioară înseamnă trecerea la numărul complex conjugat.

Vom păstra pentru spaţiul funcţiilor test cu valori complexe şi cel al distribuţiilor respective aceleaşi notaţii ca cele folosite mai înainte: K, respectiv K'.

Adunarea şi înmulţirea printr-un număr complex în spaţiul distribuţiilor complexe sînt date prin formulele

$$(2) \qquad \begin{aligned} (f_1 + f_2, \varphi) &= (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \\ (\alpha f, \varphi) &= \bar{\alpha}(f, \varphi) = (f, \bar{\alpha}\varphi). \end{aligned}$$

Înmulţirea cu o funcţie $a(x)$, indefinit derivabilă cu valori complexe se face în conformitate cu formula

$$(3) \qquad (a(x)f, \varphi) = (f, \overline{a(x)}\,\varphi).$$

Fiecărei distribuţii f i se poate asocia distribuţia conjugată $\bar{f}$, prin formula:

$$(4) \qquad (\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}.$$

Este ușor de verificat că pentru o funcție uzuală $f(x)$, considerată ca distribuție, operația de conjugare corespunde trecerii la funcția complex conjugată uzuală.

În continuare vom considera, de regulă, cazul real. Dar rezultatele obținute pentru distribuțiile reale se transpun, în cele mai multe cazuri, în mod automat la cazul complex, cu modificările evidente ce decurg din formulele (1) — (4).

1.10. **Alte spații de funcții test.** Funcționalele definite pe spațiul funcțiilor test K, se pot adesea prelungi la alte spații mai largi și studia în aceste spații.

Unul dintre acestea, ce se întîlnește adesea în aplicații este spațiul S, ale cărui elemente sînt acele funcții indefinit diferențiabile $\varphi(x)$ care, pentru $|x| \to \infty$ tind către zero mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|x|}$, împreună cu toate derivatele lor de orice ordin (de exemplu e^{-x^2}). Astfel, pe dreapta reală $-\infty < x < \infty$, funcțiile $\varphi(x) \in S$ verifică inegalitățile de forma

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| < C_{kq}, \tag{1}$$

pentru orice k, $q = 0, 1, 2, \ldots$

În cazul mai multor variabile independente $x_1 \ldots, x_n$ inegalitatea (1) este înlocuită de inegalitățile

$$\left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} \right| \leqslant C_{k_1,\ldots,k_n,q_1,\ldots,q_n}$$

$$(k_1, \ldots q_n = 0, 1, 2, \ldots),$$

care, simbolic, se pot scrie sub o formă mai simplă

$$|x^k D^q \varphi(x)| < C_{kq},$$

unde $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$

$$D^q = \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}.$$

Convergența în spațiul S se introduce astfel: *șirul* $\varphi_\nu(x)$ *converge către funcția* $\varphi(x)$, dacă derivatele de orice ordin ale funcțiilor $\varphi_\nu(x)$, pe orice compact, converg uniform către derivatele corespunzătoare ale funcției $\varphi(x)$ și în inegalitățile

$$|x^k D^q \varphi_\nu(x)| \leqslant C_{kq} \tag{2}$$

constantele C_{kq} se pot alege independent de indicele ν. În aceste condiții, funcția limită $\varphi(x)$ aparține spațiului S, ceea ce rezultă din inegalitatea (2), după trecerea la limită pentru $\nu \to \infty$.

Este evident că orice funcție indefinit diferențiabilă cu suport compact, adică orice funcție test din K aparține de asemenea spațiului S. Mai mult, *funcțiile cu suport compact formează în spațiul* S *un subspațiu dens*. Pentru a demonsta aceasta construim funcțiile $e_\nu(x) \in K$ identic egale cu 1 în cubul $|x_j| \leqslant \nu$, identic nule în afara cubului $|x_j| \leqslant 2\nu$ și astfel încît derivatele de un ordin fixat, dar arbitrar, ale tuturor funcțiilor $e_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) să fie mărginite de un număr independent de ν. *)

Dacă $\varphi(x)$ este o funcție oarecare aparținînd spațiului S, atunci produsele $\varphi_\nu(x) = \varphi(x)e_\nu(x)$ vor fi cu suport compact și, după cum se vede ușor, vor converge către φ în spațiul S, adică ceea ce trebuia arătat.

Să remarcăm în plus că dacă $\varphi_\nu, \varphi \in K$ și $\varphi_\nu \to \varphi$ în K, atunci evident $\varphi_\nu \to \varphi$ și în sensul convergenței în S, cu alte cuvinte convergența în spațiul K este mai tare decît convergența în spațiul S.

Mulțimea tuturor funcționalelor continue pe spațiul S o notăm cu S'. Este evident că orice funcțională liniară continuă pe spațiul S este totodată și o funcțională liniară continuă pe spațiul K, deci $S' \subset K'$. Dar desigur, nu orice funcțională liniară și continuă pe K poate fi prelungită la spațiul S. (Să observăm că ori de cîte ori o asemenea prelungire a unei funcționale date f este posibilă, atunci ea este unică, în virtutea densității lui K în S). Totuși, pe S se prelungesc toate funcționalele cu suport compact, toate funcționalele regulate ce corespund la funcții $f(x)$ ce nu cresc mai repede decît o anumită putere a lui x pentru $|x| \to \infty$ și încă altele.

Este evident că S' este un spațiu vectorial: dacă $f, g \in S'$, atunci $\alpha f + \beta g \in S'$ pentru orice numere α și β. Prin urmare S' este un subspațiu vectorial al spațiului K'. În spațiul S' se poate defini convergența asemănător cu felul în care a fost definită aceasta în K': vom spune că șirul de funcționale f_ν din S' *converge* către funcționala f din S' dacă pentru orice $\varphi(x) \in S$,

$$(f_\nu, \varphi) \to (f, \varphi).$$

*) De exemplu se poate alege $e_1(x)$ și apoi pune $e_\nu(x) = e_1\left(\frac{x}{\nu}\right)$.

Cum S conține pe K este clar că dacă f, f aparțin lui S' și $f_\nu \to f$ în S', atunci $f_\nu \to f$ în K'. Astfel spațiul S' este inclus în spațiul K', și noțiunile de convergență (cea definită pe S' și cea indusă din K') coincid.

În afara spațiului S există multe alte tipuri de spații de funcții test, definite prin diferite tipuri de condiții privind comportarea la infinit a funcțiilor test. Vom considera astfel de spații în volumele următoare.

În volumul de față spațiile S și S' vor juca un rol secundar. De regulă, vom considera spațiile K și K'; în acele cazuri cînd va fi necesară utilizarea altor spații, acest lucru va fi specificat.

§ 2. Derivarea și integrarea distribuțiilor

2.1. **Definiții.** Se știe că operația de derivare nu poate fi aplicată oricărei funcții; există foarte multe funcții ce nu au derivate, în sensul uzual. Dimpotrivă, vom arăta că *distribuțiile posedă derivate* (de orice ordin) și că *acestea sînt la rîndul lor distribuții.*

Pentru a ajunge la definirea derivatei unei distribuții, să considerăm pentru început cazul funcțiilor uzuale de o variabilă. Dacă funcția $f(x)$ este continuă și are derivata continuă (în sensul uzual), putem considera funcționala

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Integrînd prin părți și ținînd seama de faptul că funcția $\varphi(x)$ se anulează în afara unui anumit interval $[a, b]$, obținem

$$(1) \qquad (f', \varphi) = f(x)\, \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx = (f, -\varphi').$$

Această egalitate ne va furniza definiția derivatei unei distribuții. Fie f o funcțională liniară și continuă, altfel arbitrară, pe spațiul K. Atunci funcționala g, definită de formula

$$(2) \qquad (g, \varphi) = (f, -\varphi'),$$

o vom numi derivata funcționalei f și o vom nota f' sau $\dfrac{df}{dx}$.

Ca urmare a convențiilor de notație (§ 1.3), vom putea scrie sub o formă extrem de sugestivă definiția derivatei f' a distribuției f:

$$(2') \qquad \int f'(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Pentru a ne convinge de corectitudinea definiției derivatei arătăm că funcționala g este de asemenea o funcțională liniară și continuă pe spațiul K.

Pentru început, funcționala g este definită pentru toate funcțiile test, căci $-\varphi'(x)$ este funcție test odată cu $\varphi(x)$. Evident, funcționala g este liniară. Rămîne de arătat că este și continuă.

Fie dat un șir $\varphi_\nu(x)$ de funcții test ($\nu = 1, 2, \ldots$) ce converge către zero în spațiul K. Atunci, în conformitate cu definiția convergenței în spațiul K, șirul derivatelor $-\varphi_\nu'(x)$ converge de asemenea către zero în spațiul K. De aceea continuitatea funcționalei f implică

$$(g, \varphi_\nu) = (f, -\varphi_\nu') \to 0,$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Astfel, orice distribuție f are o derivată.

Este ușor de arătat că regulile uzuale de derivare rămîn valabile: derivata sumei este suma derivatelor și orice factor constant comută cu derivarea.

În ceea ce privește produsul unei funcții $a(x)$ indefinit derivabile cu o distribuție, regula clasică de derivare rămîne valabilă.

$$(3) \qquad (af)' = a'f + af'.$$

Într-adevăr, avem

$$((af)', \varphi) = -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)' - a'\varphi) =$$

$$= -(f, (a\varphi')) + (f_1, a'\varphi) = (f', a\varphi) + (a'f, \varphi) =$$

$$= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi).$$

Să trecem acum la cazul mai multor variabile independente. În acest caz putem defini pentru orice distribuție f derivatele sale parțiale în raport cu fiecare dintre variabilele independente $x_1, x_2 \ldots$ $\ldots, x_n$, prin formulele

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots n).$$

Ca mai înainte este ușor de a verifica corectitudinea acestei definiții: dacă funcționala f este regulată, funcția corespunzătoare $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind continuă și având o derivată continuă în raport cu variabila x_j, atunci, o integrare prin părți, ca mai sus, ne permite să conchidem că funcționala $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ este o funcțională de tip funcție atașată lui $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}$.

Rezultatul derivării unei distribuții fiind o distribuție putem defini derivatele succesive $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ ș.a.m.d. de orice ordin. Astfel, *toate distribuțiile admit derivate de orice ordin.* În particular, orice funcție local integrabilă are în sensul generalizat al derivării distribuțiilor derivate de ordice ordin (de altfel, dacă funcția f are derivată în sens uzual, atunci funcționala pe care o definește nu coincide neapărat cu derivata lui f în sensul distribuțiilor).

În volumul II (cap. II, § 4) va fi demonstrată teorema reciprocă: *orice distribuție este derivata, în sens generalizat, de anumit ordin a unei funcții local integrabile* (și chiar a unei funcții continui), *sau eventual, o sumă finită de astfel de derivate.*

Derivatele mixte ale distribuțiilor nu depind de ordinea de derivare: astfel, de exemplu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Într-adevăr

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi\right).$$

Observație. Se poate defini derivata unei distribuții ca limita unui anumit raport, ceea ce este mai apropiat de definiția uzuală a derivatei. Pentru simplitate ne mărginim la cazul funcțiilor de o singură variabilă.

Reamintim că oricărei distribuții f putem să-i construim translatata, de pildă cu Δx, cu ajutorul formulei (v. § 1.6)

$$(5) \qquad f(x + \Delta x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x - \Delta x)).$$

Să arătăm acum că, oricare ar fi distribuția f, există limita (în sensul distribuțiilor) raportului

$$(6) \qquad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

pentru $\Delta x \to 0$, și că această limită coincide cu derivata $\frac{df}{dx}$ definită mai înainte. Într-adevăr, aplicînd (6) funcției test $\varphi(x)$ și utilizînd formula (5), găsim:

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x)\right) = \left(f(x), \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}\right).$$

Dar raportul $\frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$ are ca limită în sensul convergenței în spațiul K, pentru $\Delta x \to 0$, funcția test $-\varphi'(x)$. Cum funcționala f este continuă, avem:

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x)\right) \to (f(x), -\varphi'(x)) = (f', \varphi),$$

unde f' este derivata distribuției f definită mai înainte. Astfel, raportul $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ are într-adevăr ca limită în spațiul K' funcționala $f'(x)$, ceea ce trebuia arătat.

2.2. Exemple în cazul funcțiilor de o variabilă. Am văzut mai sus că funcționala f' corespunde funcției $f'(x)$, dacă funcțiile $f(x)$ și $f'(x)$ sînt continue. Nu este greu de verificat că acest lucru rămîne adevărat și în cazul în care $f(x)$ este continuă, iar $f'(x)$ este doar continuă pe porțiuni (și poate chiar să nu existe într-un număr finit de puncte). Într-adevăr, în acest caz rămîne valabilă egalitatea (1) din punctul precedent.

O condiție și mai generală care asigură valabilitatea egalității (1) este continuitatea absolută a funcției $f(x)$, care implică, după cum este bine cunoscut, existența derivatei $f'(x)$ aproape peste tot, integrabilitatea sa locală și legitimitatea integrării prin părți corespunzătoare egalității (1), § 2.1.

Să trecem la exemple.

Exemplul 1. Considerăm funcţia

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{cînd } x < 0, \\ 1 & \text{cînd } x > 0. \end{cases}$$

Funcţionala ce-i corespunde o vom nota de asemenea prin $\theta(x)$. Conform formulei generale (2) din § 2.1, funcţionala $\theta'(x)$ acţionează asupra funcţiei test $\varphi(x)$ astfel:

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

şi deci, avînd în vedere definiţia funcţiei δ (§ 1.3)

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Analog, se arată uşor că

$$\theta'(x - h) = \delta(x - h).$$

Exemplul 2. Fie acum $f(x)$ o funcţie continuă pe porţiuni, avînd în punctele $x_1, x_2, \ldots$ discontinuităţi de prima speţă cu salturile $h_1, h_2, \ldots$ (fig. 1), cu derivata $f'(x)$ continuă pe porţiuni. Derivata $f'(x)$ este definită peste tot, în afara unui număr finit de puncte. Să găsim derivata funcţionalei f corespunzînd funcţiei $f(x)$.

Introducem funcţia

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k). \tag{1}$$

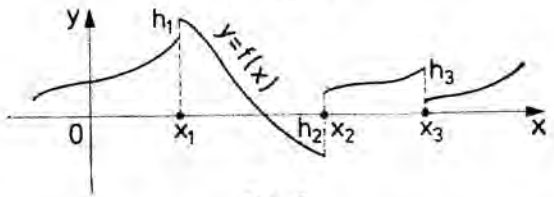

Fig. 1

Este evident că ea este continuă peste tot şi că are, cu excepţia unui număr finit de puncte, o derivată egală cu $f'(x)$. Derivata funcţionalei regulate f_1, corespunzînd funcţiei $f_1(x)$, în urma celor spuse la începutul acestui punct, coincide cu funcţionala regulată definită de funcţia $f'(x)$. Astfel, derivînd relaţia (1) găsim

$$f'_1 = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k),$$

de unde

$$f' = f'_1 + \sum_k h_k \delta(x - x_k).$$

Prin urmare, *dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe porţiuni cu derivată continuă pe porţiuni, atunci prin derivare, la orice punct de discontinuitate de prima speţă x_k a funcţiei $f(x)$, cu un salt h_k, trebuie să adăugăm expresiei derivatei o contribuţie egală cu $h_k\delta(x - x)$.*

O situaţie specială apare atunci cînd se derivează o funcţie uzuală $f(x)$, a cărei derivată $f'(x)$ există în sens obişnuit, cu excepţia eventuală a unor puncte izolate, dar care nu este local integrabilă (de exemplu, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ sau $f(x) = \ln|x|$). În acest caz, distribuţia f' ar trebui să fie definită formal, prin integrala

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Dar această integrală este divergentă în general şi ca atare nu defineşte funcţională.

În pct. 4 al anexei 1 va fi demonstrat că funcţionala căutată f' trebuie să coincidă cu funcţia $f'(x)$ în toate punctele în care $f'(x)$ este local integrabilă. Astfel, funcţionala căutată f' apare ca una dintre regularizatele posibile (v. § 1.7) ale integralei (2) şi anume, regularizata definită de formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \varphi(x)dx = (f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx. \tag{3}$$

În § 1.7 am văzut că regularizata f a funcţiei $f(x)$ cu singularităţi neintegrabile în puncte izolate este definită (dacă există) doar cu aproximaţia unei funcţionale, concentrată în aceste puncte. Formula (3) defineşte o regularizată concretă. Se poate arăta că această regularizată apare ca o regularizare naturală (v. § 3.1 şi § 3.7).

Este de dorit ca în rezultatul definitiv să figureze funcţia $\varphi(x)$ şi nu derivata sa. Se poate adesea ajunge la aceasta simplificare, utilizînd forma concretă a funcţiei $f(x)$ pentru a transforma al doilea membru al relaţiei (3).

Exemplul 3. Să calculăm derivata distribuţiei

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ x^\lambda & \text{pentru } x \geqslant 0, \end{cases} \quad (-1 < \lambda < 0).$$

Această funcție este local integrabilă, dar derivata sa în sens uzual, $\lambda x^{\lambda-1}$ nu este local integrabilă și sîntem conduși la problema regularizării integralei divergente:

$$\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Conform regulii generale de derivare a distribuțiilor avem:

$$((x_+^\lambda)', \varphi) = -(x_+^\lambda, \varphi') = -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^\lambda\varphi'(x)\,dx.$$

Integrînd prin părți, punînd $\varphi'(x)dx = du$, $x^\lambda = v$, $u = \varphi(x) + C$ obținem:

$$((x_+^\lambda),\ \varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^\lambda(\varphi(x)+C)\Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)+C]\,dx\right].$$

Termenul integrat are o limită pentru $\varepsilon \to 0$, care va fi zero dacă se ia $C = -\varphi(0)$. Să presupunem că l-am ales pe C astfel, avem atunci

$$((x_+^\lambda),\ \varphi) = \lim\int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx = \int_0^\infty [\varphi(x) - \varphi(0)]\,\lambda x^{\lambda-1}dx, \tag{5}$$

ceea ce constituie regula căutată pentru a da un sens integralei divergente (4). Această regulă, după cum se vede, constă, în cazul de față, în a înlocui funcția $\varphi(x)$ prin $\varphi(x) - \varphi(0)$, ceea ce asigură convergența integralei pentru $x = 0$ (fără a modifica convergența la infinit). Vom nota în mod natural prin $\lambda x_+^{\lambda-1}$ distribuția definită de (5) și astfel:

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}.$$

Funcționala $\lambda x_+^{\lambda-1}$ nu este regulată. Dar pentru orice $x \neq 0$ ea este identică cu o funcțională regulată; din formula (5) este limpede că pentru funcții test $\varphi(x)$, al căror suport nu conține pe 0, ea acționează ca funcția uzuală $\lambda x_+^{\lambda-1}$.

Exemplul 4. Este puțin mai complicat de a obține derivata funcției

$$\ln x_+ = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ \ln x & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Și aici derivarea formală

$$((\ln x_+),\varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \tag{6}$$

conduce la o integrală divergentă. Această integrală divergentă nu poate fi însă regularizată schimbînd pe $\varphi(x)$ cu $\varphi(x) - \varphi(0)$, pentru că după această schimbare integrala obținută diverge la infinit. Urmînd calea prin exemplul precedent, obținem:

$$((\ln x_+),\varphi) = -(\ln x_+,\ \varphi) = -\int_0^\infty \ln x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \ln x\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln x\,\varphi(x)\Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right].$$

Expresia $-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon$ se poate înlocui prin expresia mai simplă $-\varphi(0)\ln\varepsilon$, pentru că diferența dintre ele, $[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)]\ln\varepsilon$ tinde către 0 odată cu ε. În continuare, putem scrie

$$-\varphi(0)\ln\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(0)\theta(1-x)}{x}\,dx$$

unde, ca mai înainte,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ 1 & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Obținem în final

$$((\ln x_+), \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ceea ce constituie regula prin care putem atribui un sens integralei divergente (6). Vedem că ea asigură convergența integralei pentru $x = 0$ fără a strica convergenta sa la infinit.

Ca și în exemplul precedent, funcționala obținută nu este regulată global; dar pentru $x \neq 0$ ea coincide cu funcția $\frac{1}{x}$.

Exemplul 5. Să găsim derivata distribuției $\ln|x|$. Aici ne lovim de necesitatea regularizării integralei divergente $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

S-ar putea obține regularizarea, combinînd regulile, deja cunoscute, de derivare ale lui $\ln x_+$ și $\ln(-x)_+$. Dar este mai simplu de dat o construcție directă:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}, \varphi(x)\right) = (\ln|x|, -\varphi'(x)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x)\,\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

După cum se știe, limita obținută se numește *valoarea principală în sensul lui Cauchy* a integralei din $\frac{\varphi(x)}{x}$; vom păstra pentru ea notația $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$*. Astfel

$$\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}.$$

Funcționala $\frac{1}{x}$ nu este regulată, dar coincide cu funcția $\frac{1}{x}$ în afara punctului $x = 0$.

Se poate defini această funcțională și prin altă formulă, evident identică cu rezultatul obținut mai sus, dar care nu conține decît integrale convergente:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}, \varphi\right) = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exemplul 6. Să găsim derivata distribuției $\ln(x + \mathrm{i}0)$ definită prin:

$$\ln(x + \mathrm{i}0) = \lim_{y \to +0} \ln(x + iy).$$

Scriind $\ln(x + iy)$ sub forma $\ln|x + iy| + \mathrm{i}\arg(x + iy)$ și trecînd la limită, vedem că

$$\ln(x + \mathrm{i}0) = \ln|x| + \mathrm{i}\pi\theta(-x).$$

În conformitate cu exemplul 2, $\theta'(x) = \delta(x)$; deoarece $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, rezultă $\theta'(-x) = -\delta(x)$. De aceea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x + \mathrm{i}0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| + \mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(-x) = \frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\,\delta(x)$$

unde distribuția $\frac{1}{x}$ a fost definită în exemplul 5. (v. de asemenea ex. 4 din § 2.4).

* De obicei această valoare principala se notează v.p., deci în cazul nostru rezultatul va fi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Nota trad.)

Exemplul 7. În încheierea acestui punct calculăm derivatele distribuției δ. Avem, evident

$$(\delta'(x-h), \varphi) = (\delta(x-h), -\varphi')) = -\varphi'(h),$$

și în general:

$$(\delta^{(k)}(x-h), \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(h) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

sau, utilizînd notația din § 1.3,

$$\int \delta^{(k)}(x-h)\, \varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^k \varphi^{(k)}(h).$$

2.3. Exemple în cazul funcțiilor de mai multe variabile. Să remarcăm, înainte de toate, că pentru funcțiile continue $f(x)$ avînd derivate parțiale continue pe porțiuni, derivarea funcționalelor regulate care le corespund, conduce iarăși la funcționale regulate, corespunzînd derivatelor respective.

Exemplul 1. Fie $f(x)$ o funcție avînd derivate continue în domeniul G, mărginit de un contur Γ neted pe porțiuni, în planul x_1, x_2. Presupunem funcția $f(x)$ nulă în afara domeniului G, deci la trecerea prin frontiera Γ funcția are un salt. Să găsim funcționala $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Conform regulei generale, avem, pentru orice funcție test φ:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\iint_G f(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2.$$

Integrînd prin părți în raport cu variabila x_1, găsim:

$$\iint_G f(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = \int \left\{ f(x_1, x_2)\, \varphi(x_1, x_2) \Big|_{x_1^0}^{x_1^1} - \right.$$

$$\left. - \int_{x_1^0}^{x_1^1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \right\} \mathrm{d}x_2 =$$

$$\int_\Gamma f(x_1, x_2) \cos(n, x_2)\, \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}\gamma - \iint_G \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2,$$

unde (n, x_2) este unghiul făcut în punctul (x_1, x_2) de pe frontiera Γ a domeniului G, între normala exterioară și axa x_2. În acest mod,

funcționala $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ este suma unei funcționale regulate, corespunzînd funcției $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ și a uneia singulare, ce corespunde saltului lui $f(x_1, x_2)$ la trecerea prin frontiera Γ a domeniului G. Un rezultat analog are loc într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni.

Cunoscuta formulă a lui Green (Δ — operatorul lui Laplace)

$$\iint_G f(x_1, x_2)\, \Delta\varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \iint_G \Delta f(x_1, x_2)\, \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, dx_2 + \int_\Gamma \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \varphi \right) \mathrm{d}\gamma$$

se poate interpreta, ținînd seama de egalitatea $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta\varphi)$, în modul următor: *dacă f este o distribuție ce coincide în domeniul G cu o funcție local integrabilă $f(x_1, x_2)$ și este nulă în afara lui G, atunci distribuția Δf este suma dintre o funcțională regulată, corespunzînd funcției $\Delta f(x_1, x_2)$ în interiorul lui G, și două funcționale singulare, ce corespund salturilor funcțiilor f și $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ la trecerea prin frontieră.*

Un rezultat analog are loc și în cazul unui număr oarecare de variabile.

În cap. III (§ 1.4) vom da o demonstrație directă pentru acest tip de relații, utilizînd anumite distribuții $\delta(P)$ și altele analoage.

Exemplul 2. Să găsim în spațiul cu 3 dimensiuni rezultatul aplicării operatorului lui Laplace Δ, funcționalei regulate definite de $\dfrac{1}{r}$, ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$).

Să remarcăm că funcția $\dfrac{1}{r}$ este armonică în orice domeniu ce nu conține originea, căci $\Delta \dfrac{1}{r}$ se anulează pentru $r \neq 0$ (în sensul uzual). Considerînd operatorul Δ în spațiul distribuțiilor, găsim:

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta\varphi\right) = \iiint \frac{\Delta\varphi}{r} \mathrm{d}v = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r} \mathrm{d}V.$$

Aplicăm integralei obținute astfel formula lui Green (ex. 1) luînd ca domeniu G coroana sferică $\varepsilon \leqslant r < a$, a fiind suficient de mare ca, în afara sferei de rază $r = a$, funcția $\varphi(x)$ să fie identic nulă :

$$\iiint_{r\geqslant\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}\,dv =$$

$$= \iiint_{r\geqslant\varepsilon} \varphi\,\Delta\frac{1}{r}\,dv - \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r}\,ds + \iint_{r=\varepsilon} \varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\,ds,$$

ds fiind elementul de suprafață al sferei de rază $r = \varepsilon$. În continuare avem :

$$\iiint_{r\geqslant\varepsilon} \varphi\Delta\frac{1}{r}\,dv = 0,$$

căci $\frac{1}{r}$ este o funcție armonică în exteriorul bilei $r \leqslant \varepsilon$,

$$\iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r}\,ds = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{r=\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial r}\,ds = 0(\varepsilon)^*$$

$$\iint_{r=\varepsilon} \varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\,ds = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon}\varphi\,ds = -\,4\pi S_\varepsilon(\varphi),$$

unde $S(\varphi)$ este media funcției $\varphi(x)$ pe sfera de rază ε. Trecînd la limită $\varepsilon \to 0$, obținem $S(\varphi) \to \varphi(0)$ și prin urmare

$$\left(\Delta\frac{1}{r}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dv = -\,4\pi\varphi(0) = 4\pi(\delta(x),\ \varphi(x)).$$

Avem deci :

$$\Delta\frac{1}{r} = -\,4\pi\delta(x). \tag{1}$$

Un calcul analog dă, în cazul a n variabile, $n \geqslant 3$,

$$\Delta\frac{1}{r^{n-1}} = -\,(n-2)\,\Omega_r\delta(x),$$

* Aici $y = O(x)$ înseamnă că raportul $\frac{y}{x}$ este mărginit.

unde Ω_n este aria sferei de rază 1 în spațiul n-dimensional. Pentru $n = 2$,

$$\Delta \ln\frac{1}{r} = -\,2\pi\delta(x).$$

În continuare (cap. III, § 3.3) vom da unele reguli generale privind derivarea funcțiilor atunci cînd derivatele nu sînt local integrabile. Cu ajutorul acestor reguli, formule de tipul (1) vor putea fi obținute automat calculînd $\Delta\frac{1}{r}$ ca sumă de derivate de ordinul 2 ale lui $\frac{1}{r}$.

2.4. **Continuitatea operației de derivare.** Fie dat un șir de distribuții $f_1, f_2 \ldots f_\nu, \ldots$ ce converge către distribuția f; afirmăm că *șirul derivatelor* $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ *converge către derivata* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Într-adevăr, pentru orice funcție test $\varphi(x)$ avem :

$$\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f_\nu, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) \to \left(f, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right),$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Analog, *seria de distribuții* $h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu \ldots$ *ce converge către distribuția* g, *poate fi derivată termen cu termen*, cu alte cuvinte are loc

$$h_1' + h_2' + \ldots + h_\nu' + \ldots = g'.$$

Teoreme de acest gen nu au loc în analiza clasică : un șir convergent de funcții derivabile în general nu se poate deriva termen cu termen. Să considerăm, de exemplu, șirul $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\sin\nu x$ pe axa reală, ce converge uniform către 0. Șirul derivatelor $f_\nu'(x) = \cos\nu x$ în sens clasic nu are limită, deci în particular nu converge către derivata funcției limită. Dar în sensul distribuțiilor, șirul $f_\nu'(x)$ converge, și anume el converge către zero ; ceea ce se verifică printr-un calcul direct :

$$(f_\nu', \varphi) = \int_{-a}^{a}\cos\nu x\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\nu}\int_{-a}^{a}\sin\nu x\,\varphi'(x)\,dx \to 0,$$

unde $[-a, a]$ este un segment în afara căruia funcţia $\varphi(x)$ este identic nulă. Mai mult, şirurile $f_\nu'' = -\nu \sin \nu x$, $f'' = -\nu^2 \cos \nu x$, ... ($\nu = 1,2, \ldots$), ş.a.m.d. converg toate către zero, ca distribuţii.

Exemplul 1. Dezvoltarea unei funcţii periodice în serie Fourier. Fie $f(x)$ o funcţie periodică (de perioadă 2π), local integrabilă avînd coeficienţii Fourier definiţi de formulele clasice:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Afirmăm că seria *Fourier* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ *are ca sumă* (în sensul distribuţiilor) *funcţia* $f(x)$. Într-adevăr, după o teoremă bine cunoscută * în analiză, seria, integrată formal

$$\sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

converge uniform către o funcţie absolut continuă $F(x)$, a cărei derivată coincide aproape peste tot cu $f(x)$. Derivînd termen cu termen egalitatea

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx},$$

găsim $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, adică ceea ce trebuia arătat.

Exemplul 2. Orice serie de forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ *ai cărei coeficienţi, pentru* $|n| \to \infty$ *nu cresc mai repede decît o anumită putere a lui* n, *converge în sensul distribuţiilor*, căci ea se obţine prin derivări termen cu termen din seria $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(in)^k} e^{inx}$, care converge uniform pentru k suficient de mare.

Exemplul 3. Este bine cunoscut că seria $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$ converge către funcţia $f(x)$, egală cu $\frac{\pi - x}{2}$ pentru

* A. Zygmund, *Serii trigonometrice*, Vol. I, pag. 74, teorema 2.5 (ed. a II-a, trad. din l. rusă).

$0 < x < 2\pi$ şi prelungită apoi prin periodicitate (cu perioada 2π) pe întreaga axă reală. Sumele parţiale ale acestei serii sînt uniform mărginite *. Astfel seria converge în sensul distribuţiilor (v. § 1.8 a). Derivînd această serie găsim

$$(1)\begin{cases} \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n), \\ \sin x + 2 \sin 2x + \ldots + n \sin x + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n), \\ \cos x + 4 \cos 2x + \ldots + n^2 \cos nx + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \Sigma\delta''(x - 2\pi n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dacă în prima din aceste formule scriem cosinuşii după formulele lui Euler, obţinem de asemenea egalitatea

$$(2)\quad 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n).$$

Aplicînd-o apoi funcţiei test $\varphi(x)$ şi utilizînd faptul că

$$(e^{inx}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-inx} dx = \psi(-n)^*$$

este valoarea în punctul $-n$ a transformatei Fourier a funcţiei $\varphi(x)$, obţinem egalitatea

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(n) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

numită formula de sumare a lui Poisson **. Ea este deci demonstrată aici pentru funcţiile $\varphi(x)$ aparţinînd spaţiului K; dar, prin treceri

* v. G. M. Fichtengolt : *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. III, pg. 408–409. Ed. tehnică, 1965, traducere. În continuare vom scrie pe scurt : G. M. Fichtengolt, Curs.

* e^{nix} fiind o funcţie cu valori complexe, ea se aplică funcţiei test cf. formulei (1) § 1.9.

** v. ex. de. A. Zygmund, *Serii trigonometrice*, vol. I, pag. 117, formule (13.4) ed. a II-a, trad. în l. rusă).

la limită, ea poate fi extinsă la clase mai largi de funcții, de exemplu, la funcțiile $\varphi(x)$ absolut integrabile împreună cu derivatele lor.

Analog, egalitatea*

$$(3)\qquad \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

permite, prin derivare, calculul a noi serii trigonometrice. Derivînd formal, obținem:

$$(4)\quad \begin{cases} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} \\ \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots = \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}, \\ \sin x + 4\sin 2x + 9\sin 3x + \cdots = \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'' = \dfrac{1}{4}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^3\dfrac{x}{2}}, \end{cases}$$

Dar funcția $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ nu este local integrabilă și integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,\varphi(x)\,dx,$$

în general, diverge. În § 3.7 vor fi construite distribuții, ce corespund funcțiilor uzuale ce figurează în membrul al 2-lea în (4). Pe de altă parte distribuția corespunzînd funcției $-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$ va fi derivata distribuției $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ etc. Altfel spus, vom da sens egalităților (4) din punct de vedere al teoriei distribuțiilor.

* Fichtengolt, *Curs*, t. III, pag. 416.

Formulele (1) și (4) permit separarea singularităților în suma seriei trigonometrice $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, ai cărei coeficienți sînt dați, de pildă, în felul următor:

$$a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2},$$

$$b_n = \beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \ldots + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{n} + \frac{\delta_n}{n^2},$$

cu α_i și β_i — constante, iar $\{\gamma_n\}$ și $\{\delta_n\}$ șiruri mărginite de numere *)

Exemplul 4. Considerăm funcționala f, definită de funcția

$$\ln(x + i0) = \begin{cases} \ln|x| + i\pi & \text{pentru } x < 0, \\ \ln x & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Cum se vede din definiție, această funcție este limita (în sensul distribuțiilor) a funcției $\ln(x + iy)$ pentru $y \to 0$. Să arătăm că

$$\ln(x + i0) = \lim_{y\to 0} \ln(x + iy),$$

limita fiind înțeleasă în sensul teoriei distribuțiilor. Într-adevăr, pentru $y > 0$ fixat,

$$\ln(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};$$

pentru $y \to 0$ această funcție tinde către $\ln(x + i0)$, deci:

a) primul termen $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ descrește monoton, convergînd către $\ln|x|$,

b) al doilea termen $i \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, mărginit în modul de π, converge către funcția

$$h(x) = \begin{cases} i\pi & \text{pentru } x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

*) v. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*, t. II, pct. 158, pag. 493, Ed. tehnică, 1954. În continuare vom scrie: V. I. Smirnov, *Curs*.

Convergența, $\ln(x+iy) \to \ln(x+i0)$ în sensul distribuțiilor are loc deci în virtutea condițiilor menționate la § 1.8.
Derivata lui $\ln|x|$ este $1/x$ (§ 2.2 ex. 5); derivata lui $h(x)$ este egală cu $-i\pi\delta(x)$ (§ 2.2, ex. 2). Și regăsim astfel rezultatul exemplului 6, § 2.2:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x).$$

Pe de altă parte, datorită continuității derivării

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\lim_{y\to+0}\frac{d}{dx}\ln(x+iy)=\lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy}.$$

Obținem formula interesantă

$$\lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x), \tag{5}$$

care are următorul sens: pentru orice funcție test $\varphi(x)$, integrala

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+iy}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx-i\pi\varphi(0)$$

din membrul drept trebuie luată în sensul valorii principale (v. § 2.2 ex. 5).

Șiruri care au ca limită pe δ („*δ-șiruri*"). Se pot construi în multe moduri șiruri de funcționale regulate care să conveargă către distribuția δ. Pentru aceasta este suficient ca funcțiile $f_\nu(x)$ corespunzătoare să aibă, după cum s-ar putea spune, alura „funcției δ". Aceasta se exprimă, mai precis, prin condițiile următoare:

a) Pentru orice $M>0$, pentru $|a|\leqslant M$, $|b|\leqslant M$ mărimile:

$$\left|\int_a^b f_\nu(\xi)\,d\xi\right|$$

sînt mărginite de o constantă ce nu depinde de a, b (și depinde doar de M).

b) Pentru a și b fixați, diferiți de zero

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f_\nu(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 \text{ pentru } a<b<0 \text{ și } 0<a<b,\\ 1 \text{ pentru } a<0<b.\end{cases}$$

Fie $f_\nu(x)$ — un astfel de șir (pe care îl vom numi δ-șir); să considerăm șirul primitivelor

$$F_\nu(x)=\int_{-1}^{x} f_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Cum rezultă ușor din însăși definiția șirului $f_\nu(x)$, cînd ν crește, funcția $F_\nu(x)$ are ca limită o constantă egală cu zero pentru $x<0$ și egală cu 1 pentru $x>0$, și este totodată uniform mărginită (în raport cu ν) pe orice interval. Rezultă de aici că funcția $F_\nu(x)$ are drept limită, în sensul distribuțiilor funcția $\theta(x)$, egală cu 0 pentru $x<0$ și 1 pentru $x>0$. Dar atunci $f_\nu(x)=F'_\nu(x)$ care au limită (în distribuții) distribuția $\theta'(x)=\delta(x)$, ceea ce trebuia arătat.

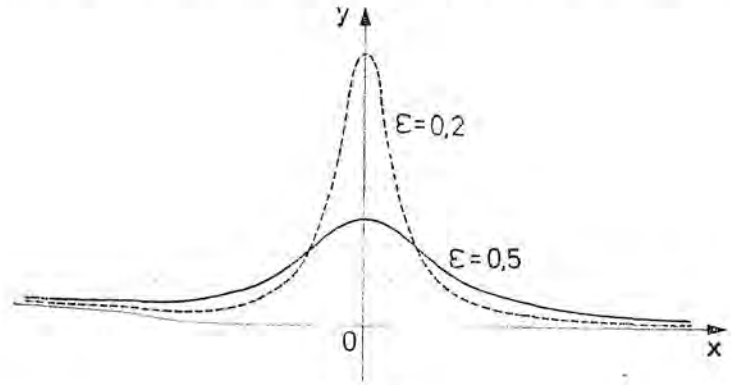

Fig. 2

Exemplul 1. Considerăm funcția

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\ (\varepsilon>0).$$

Graficul său este dat în fig. 2. Egalitatea

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{\varepsilon}-\operatorname{arctg}\frac{a}{\varepsilon}\right],$$

pentru $a \neq b$ permite ușor de a arăta că pentru $\varepsilon \to 0$, funcțiile $f_\varepsilon(x)$ formează un „δ-șir". De aceea pentru $\varepsilon \to 0$

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x).$$

Se obține același rezultat remarcînd că

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon}$$

și, după formula (5) din paragraful precedent;

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon} \to \delta(x).$$

Derivînd în raport cu x δ-șirul, vom obține un șir ce converge către derivata δ'. De exemplu, din relația (1) rezultă

$$(2) \qquad -\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} \to \delta'(x)$$

ș.a.m.d. În fig. 3 se dau graficele funcțiilor ce figurează în primul membru al relației (2).

Exemplul 2. Considerăm funcția

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t>0).$$

Să arătăm că, pentru $t \to 0$, această funcție tinde către δ. Remarcăm mai întîi că $f_t(x) > 0$; de aceea, pentru orice a și b

$$\int_a^b f_t(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1.\ ^{*)}$$

*) v. G. M. Fichtengolt, *Curs*, vol. II, pct. 492, pag. 568.

Efectuînd schimbarea de variabile $\frac{x}{\sqrt{t}} = y$ vedem că pentru $a<0<b$

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b f_t(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy = 1.$$

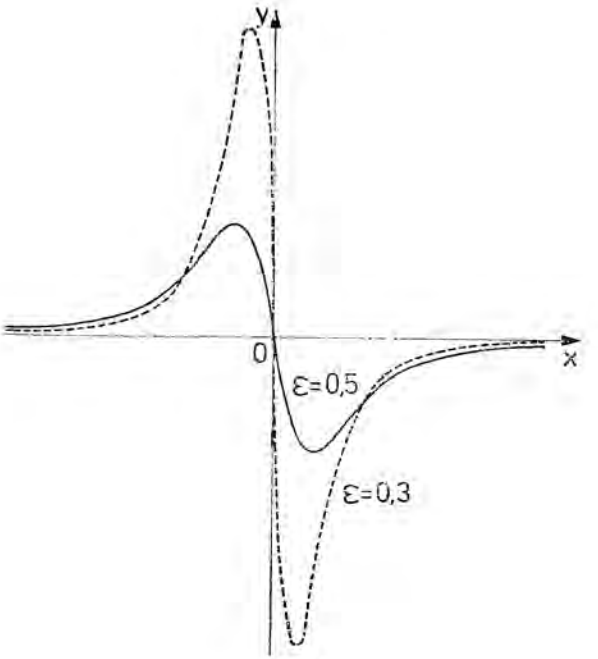

Fig. 3

În continuare, pentru orice $b>0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx < \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\frac{x}{2t}\frac{2t}{b}\,dx = \frac{\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4t}} \to 0$$

pentru $t \to 0$, astfel că integralele pe orice interval (b, ∞), $b>0$, tind către zero. Rezultat analog pentru intervalele $(-\infty, a)$, $a<0$; func-

țiile $f_t(x)$ formează deci un δ-șir, adică

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x). \tag{3}$$

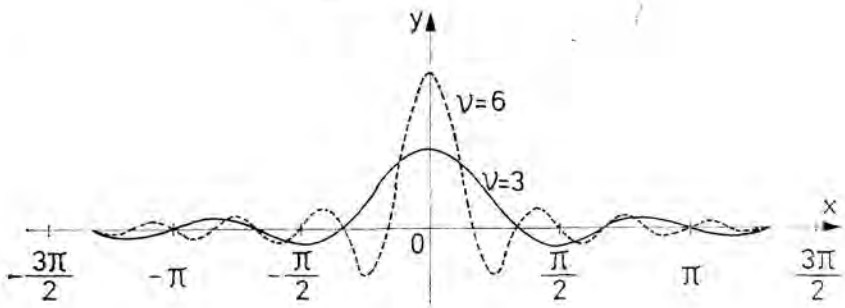

Fig. 4

Exemplul 3. Considerăm funcția

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x} \quad (0 < \nu < \infty)$$

(fig. 4). Arătăm că pentru $\nu \to \infty$ aceste funcții tind către δ. Se știe că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{x}\,dx = 1.\ ^{*)}$$

Apoi, pentru orice $b > a > 0$

$$\int_a^b f_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \nu x}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu} \frac{\sin y}{y}\,dy \to 0, \text{ pentru } \nu \to \infty;$$

același rezultat este adevărat pentru $a < b < 0$. În sfîrșit mărimea

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \nu x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu} \frac{\sin y}{y}\,dy\right|$$

*) v. G. M. Fichtengolt, *Curs*, vol. II, pct. 497, pag. 586.

este uniform mărginită în raport cu a și b pentru toți ν. Rezultă de aici că, pentru $\nu \to \infty$, funcțiile $f_\nu(x)$ formează un δ-șir,

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x} = \delta(x). \tag{4}$$

La rîndul său, funcția $\frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x}$ poate fi reprezentată ca rezultatul integrării funcției $\frac{1}{2\pi} e^{i\xi x}$ în raport cu ξ de la $-\nu$ la ν. De aceea rezultatul nostru poate fi reformulat astfel: în sensul convergenței spațiului K' are loc relația

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\nu}^{\nu} e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\delta(x). \tag{5}$$

În primul membru figurează transformata Fourier a unității. (Mai amănunțit, și din alt punct de vedere ne vom ocupa de transformata Fourier în cap. II, v. remarca de la finele § 3, cap. II).

Derivînd în raport cu x relația obținută, obținem noi egalități și mai interesante

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\nu}^{\nu} i\xi e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\delta'(x), \tag{6}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\nu}^{\nu} (i\xi)^2 e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\delta''(x) \tag{7}$$

și altele. În general, *pentru orice funcție local integrabilă $f(x)$ care nu crește, pentru $|x| \to \infty$, mai repede decît o anumită putere a lui $|x|$, există, în sensul distribuțiilor, transformata sa Fourier, limita expresiei*

$$\int_{-\nu}^{\nu} f(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi,$$

pentru $\nu \to \infty$.

Într-adevăr, putem exprima funcția $f(\xi)$ sub forma $(\xi^2+1)^m f_0(\xi)$, cu $f_0(\xi)$ funcție integrabilă. Cum $f_0(\xi)$ are transformată Fourier în sens uzual, există limita

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} f_0(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = G_0(x).$$

În plus, convergența este uniformă în raport cu x pe orice compact; prin urmare convergența are loc și în sensul distribuțiilor. Aplicînd ambilor membri operatorul $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m$ și utilizînd continuitatea derivării, putem conchide că există limita

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m G_0(x).$$

2.6. **Ecuații diferențiale în distribuții.** Operațiile care au fost definite pentru distribuții — derivarea, înmulțirea cu o funcție, adunarea — permit considerarea de expresii diferențiale de forma

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) - b(x),$$

unde $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ sînt funcții date indefinit derivabile, iar $y(x)$ și $b(x)$ distribuții. Egalînd cu zero o astfel de expresie obținem o ecuație diferențială liniară ordinară de ordinul n în raport cu distribuția $y(x)$. Se pune atunci problema de a descrie mulțimea tuturor soluțiilor unei astfel de ecuații.

Să considerăm pentru început cea mai simplă ecuație

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Arătăm că *această ecuație are ca soluție generală în clasa distribuțiilor, pe* $y = C(=\text{const})$.

Ecuația (1) este echivalentă ecuației

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0, \tag{2}$$

pentru orice funcție test $\varphi(x)$. Dar de aici rezultă că funcționala y este definită pe mulțimea Φ_0 a celor funcții test, care se pot repre-

zenta ca derivate ale altor funcții test. Trebuie să indicăm modul în care funcționala y poate fi prelungită de la mulțimea Φ_0 la întreg spațiul K.

Este ușor de arătat că o funcție test $\varphi_0(x)$ se poate reprezenta ca derivata unei anumite funcții test dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă $\varphi_0(x) = \varphi_1'(x)$, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx = \varphi_1(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Pe de altă parte, condiția (3) fiind îndeplinită, punem:

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

și rămîne doar de arătat că $\varphi_1(x)$ este o funcție test; acest lucru este evident, pentru că $\varphi_1(x)$ este indefinit derivabilă odată cu $\varphi_0(x)$ și în virtutea condiției (3) are suportul compact.

Fie acum $\varphi_1(x)$ o funcție test fixată, verificînd condiția

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\,dx = 1.$$

Pentru orice funcție test $\varphi(x)$ putem scrie

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx + \varphi_0(x),$$

unde $\varphi_0(x)$, evident verifică condiția (3). Rezultă de aici că dacă s-a dat valoarea funcționalei y pe funcția test $\varphi_1(x)$, atunci valoarea sa pe orice funcție test $\varphi(x)$ va fi unic determinată,

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Fie, de exemplu $(y, \varphi_1) = C_1$ — un număr fixat arbitrar. Atunci (4) ne dă

$$(y, \varphi) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} C_1 \varphi(x)\,dx,$$

adică distribuţia y este constanta C_1, c.t.a. Am văzut că ecuaţia diferenţială (1) nu are alte soluţii în clasa distribuţiilor, în afara celor clasice.

Exemplu. Să arătăm că *pe dreaptă, orice distribuţie f invariantă la translaţii se reduce la o constantă.* Avem în cazul acesta

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

de unde,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

din cele de mai sus, deci $f(x) = \text{const}$, c.t.a.

Se poate arăta că orice sistem omogen de ecuaţii de forma

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mm}y_m, \end{cases}$$

unde $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ sînt funcţii indefinit derivabile de x, nu are alte soluţii $(y_1, \ldots, y_m)$ în distribuţii în afara celor clasice. Situaţia este aceeaşi pentru o singură ecuaţie de ordin superior

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0,$$

cu coeficienţi indefinit derivabili şi de asemenea pentru sisteme de astfel de ecuaţii.

Indicăm demonstraţia acestor afirmaţii. Sistemul (5) îl scriem pentru a simplifica, sub forma vectorială *)

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \; A = \|a_{ij}\|.$$

*) v. R. F. Gantmacher, *Teoria matricilor*, pag. 371 şi următoarele, în lb. rusă.

Considerăm matricea $U = \|u_j^k(x)\|$ a unui sistem fundamental de soluţii (uzuale) ale sistemului. Se ştie că matricea U este inversabilă. Să trecem de la necunoscutele y la necunoscutele z după formula $y = Uz$; substituind această expresie în sistemul (5), obţinem

$$\frac{dU}{dx} z + U\frac{dz}{dx} = AUz$$

şi, pentru că $\dfrac{dU}{dx} = AU$, obţinem $U\dfrac{dz}{dx} = 0$.

Înmulţirea cu U^{-1} conduce la sistemul de ecuaţii cu variabile separate

$$\frac{dz}{dx} = 0;$$

conform celor demonstrate, rezultă $z = \text{const}$, deci $y = Uz$ este un vector, combinaţie liniară de vectori fundamentali ai sistemului.

Celelalte rezultate decurg de aici, adică o ecuaţie liniară de ordin superior şi un sistem liniar de astfel de ecuaţii se pot reduce la un sistem echivalent de ordinul 1.

Observaţie. Spre deosebire de cazul considerat, ecuaţiile ale căror coeficienţi au singularităţi, pot avea în clasa distribuţiilor noi soluţii, şi chiar se poate întîmpla să nu avem soluţii clasice.

Exemplul 1. Considerăm ecuaţia de ordinul 1

$$x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Soluţia trebuie să coincidă cu o constantă, atît pentru $x > 0$, cît şi pentru $x < 0$. Rezultă de aici că această ecuaţie are 2 soluţii liniar independente

$$y_1 = 1, \; y_2 = \theta(x).$$

Exemplul 2. Ecuaţia

$$-2x^3y' = y$$

are o singură soluţie în clasa distribuţiilor, anume $y = 0$. Într-adevăr, pentru $x \neq 0$ distribuţia trebuie să coincidă cu soluţia clasică

$y = Ce^{1/x^2}$, cu $C \neq 0$ sau $C = 0$. Dar primul caz nu este posibil, căci, cf. cu § 1.7, integrala

$$\int e^{1/x^2} \varphi(x)\, dx$$

nu admite regularizate.

Existența primitivei. Să considerăm cea mai simplă ecuație neomogenă:

$$\frac{dg}{dx} = f, \tag{6}$$

unde f este o distribuție dată, iar g cea ce trebuie găsită. Arătăm că *ecuația* (6) *are soluție în distribuții pentru orice membru drept* f. Este natural de a numi această soluție *primitiva* sau *integrala nedefinită* a distribuției f

$$g = \int f\, dx.$$

Ecuația (6) este echivalentă ecuației

$$(g, -\varphi') = (f, \varphi),$$

pentru o funcție test oarecare φ. Rezultă că funcționala g este dată pe orice funcție test ψ, care este derivata unei funcții test φ, adică pe mulțimea Φ_0 considerată mai înainte. Trebuie să prelungim funcționala g pe întreg spațiul K, ceea ce se poate realiza, de exemplu, astfel: considerăm o funcție test $\varphi_1(x)$ pentru care

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1$$

și din nou, scriem o funcție test oarecare φ sub forma

$$\varphi = \varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx + \varphi_0,$$

cu φ_0 aparținînd lui Φ_0. Astfel, la orice funcție test φ am făcut să corespundă „proiecția" sa φ_0 pe subspațiul Φ_0. Punînd atunci

$$(g_0, \varphi) = (g, \varphi_0), \tag{7}$$

este ușor de dovedit că funcționala g_0 astfel construită este liniară și continuă. Soluția generală a ecuației (7) se obține adunînd soluției particulare găsite soluția generală a ecuației omogene, care, pe baza celor arătate la începutul acestui punct este $g_1 = C = \text{const}$. Astfel, toate soluțiile ecuației (6) se scriu

$$g = g_0 + C,$$

unde funcționala g_0 este dată de formula (7).

Căutarea soluției generale a sistemului neomogen

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

unde f_i sînt distribuții, iar a_{ij} funcții indefinit derivabile, se reduce la rezolvarea unor ecuații de tipul (6).

Într-adevăr, dacă se face substituția deja folosită mai înainte $y = Uz$, unde U este matricea soluției fundamentale a sistemului omogen ($f_i = 0$), obținem $U\frac{dz}{dx} = f$ sau $\frac{dz}{dx} = U^{-1}f$. În acest sistem necunoscutele s-au „separat", fiecare ecuație care apare este de tipul (6).

În sfîrșit, ecuația neomogenă de ordin superior

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots a_m y = f, \tag{9}$$

unde a_i — sînt funcții indefinit derivabile, iar f o distribuție oarecare, se reduce la un sistem de forma (8) cu ajutorul substituției

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \ldots, y_{m-1} = \frac{dy_{m-2}}{dx}.$$

Prin urmare, căutarea soluției generale a ecuației (9) se reduce de asemenea la rezolvarea de ecuații de tipul (6).

2.7. Derivarea în spațiul S. La finele primului paragraf am introdus un nou spațiu fundamental S. Acest spațiu constă din funcțiile indefinit derivabile $\varphi(x)$ ce verifică inegalități de forma

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \qquad (k, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Am văzut că mulțimea funcționalelor liniare, definite pe spațiul S, notată S' este un subspațiu al spațiului K', dualul spațiului K.

Vom arăta cum că *operația de derivare nu ne scoate din acest subspațiu*. Pentru simplificare ne mărginim la cazul unei variabile independente. Să remarcăm mai întîi, că pentru orice funcție $\varphi(x) \in S$, derivata sa $\varphi'(x)$ aparține de asemenea lui S și că din convergența $\varphi_\nu \to 0$ în S rezultă de asemenea convergența $\varphi_\nu' \to 0$ în S. De aceea funcționala f' definită de formula

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi')$$

va fi o funcțională liniară continuă pe S.

Dar evident că, în cadrul spațiului K, ea coincide cu derivata funcționalei f în cazul indicat mai înainte (§ 2.1). Altfel spus, derivata f' a funcționalei f, considerată ca funcțională pe K se prelungește pe spațiul S odată cu funcționala f, c.t.a. Extensia acestui rezultat la cazul derivatelor de ordin superior sau la cazul mai multor variabile nu oferă nici o dificultate.

Am văzut mai înainte că toate funcționalele regulate, corespunzînd funcțiilor cu creștere polinomială se prelungesc de la spațiul S. Vedem acum că de aceeași proprietate se bucură și derivatele unor astfel de funcționale. În volumul II (cap. II, § 4) se va arăta că orice funcțională liniară continuă pe S este rezultatul aplicării unei operații de derivare unei funcții cu creștere polinomială.

§ 3. Regularizarea funcțiilor cu singularități algebrice (sau de tip putere)

3.1. **Punerea problemei.** Printre funcțiile avînd singularități neintegrabile în puncte izolate, cele mai importante sînt acelea cu *singularități algebrice*, adică care nu cresc mai repede decît o anumită putere a lui $\dfrac{1}{|x - x_0|}$ atunci cînd x tinde către x_0. Vom construi în acest paragraf distribuțiile ce corespund unei largi clase de funcții de acest fel.

Reamintim definiția regularizatei, dată în § 1.7. Regularizata integralei

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

sau regularizata funcției $f(x)$, avînd în general puncte în care nu este local integrabilă, este o funcțională f care, pentru funcțiile test $\varphi(x)$ identic nule în vecinătatea punctelor singulare ale funcției $f(x)$ este dată de integrala (1). În § 1.7 s-a arătat că orice funcție $f(x)$ cu singularități algebrice (în puncte care se găsesc în număr finit pe orice compact) admite o regularizată. În plus, această funcțională este definită cu aproximația unei funcționale concentrate în punctele singulare ale funcției $f(x)$.

Din acest punct de vedere, conținutul celei mai mari părți al acestui paragraf poate fi caracterizat astfel. Pentru o vastă clasă de funcții de o variabilă cu singularități algebrice, vom indica o regularizare, *naturală* în sensul următor: sumei a două funcții uzuale îi corespunde suma regularizatelor respective; derivatei uzuale — derivata regularizatei, produsului cu o funcție indefinit derivabilă $h(x)$ — produsul regularizatei cu $h(x)$.

Vom începe cu regularizarea funcțiilor concrete, cele mai importante, amînînd cele mai generale definiții și verificarea completă a proprietăților amintite ale regularizatelor pentru punctul 7.

Drept exemplu de funcție cu singularități algebrice poate sluji funcția

$$x_+^{-3/2} = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^{-3/2}, & x > 0. \end{cases}$$

Distribuția ce-i corespunde a fost în fapt deja construită în ex. 3, § 2.2.

$$(x_+^{-3/2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx. \tag{2}$$

Pentru aceasta plecasem de la faptul că distribuția $-\dfrac{3}{2}\,x_+^{-3/2}$ trebuia să fie derivata distribuției $x_+^{-1/2}$, adică a funcționalei regulate definite de funcția

$$x_+^{-1/2} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^{-1/2}, & x > 0. \end{cases}$$

În § 2 am văzut și pe alte exemple că adesea considerente asemănătoare permiteau construirea de distribuții care să corespundă unei funcții cu singularități algebrice.

Altă metodă permiţînd obţinerea de definiţii de forma (2) este metoda *prelungirii analitice*, pe care o vom utiliza de regulă. Înainte de a indica ideea de bază, introducem următoarele definiţii. Considerăm distribuţia f_λ, depinzînd de parametrul λ, acesta parcurgînd domeniul Λ din planul complex. Vom spune că distribuţia f_λ este *funcţie analitică de* λ, în domeniul Λ, dacă în acest domeniu toate funcţiile numerice (f_λ, φ), unde φ este o funcţie test oarecare, sînt analitice.

Distribuţiile analitice în λ, prin proprietăţile lor, sînt analoage funcţiilor analitice obişnuite de λ. Astfel, dacă definim *derivata* $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ *funcţionalei* f_λ *în raport cu parametrul* λ ca limita

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f_{\lambda+\Delta\lambda} - f_\lambda}{\Delta\lambda},$$

(în sensul din § 1.8), se poate spune că distribuţia f este analitică în λ în domeniul Λ dacă şi numai dacă în fiecare punct al acestui domeniu există derivata $\dfrac{\mathrm{d}f_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}$. Avem de asemenea teoreme analoage teoremelor clasice privind dezvoltările Taylor, în serie Laurent, de prelungire analitică etc.; toate aceste teoreme sînt reunite în anexa 2 a acestui capitol.

Ideea metodei prelungirii analitice este următoarea. Fie dată funcţia $f_\lambda(x)$, local integrabilă, atunci cînd λ parcurge un anumit domeniu din planul complex şi în general, pierzînd această proprietate pentru λ în afara domeniului Λ. Fie, apoi, pentru $\lambda \in \Lambda$ şi pentru orice funcţie test $\varphi(x)$, funcţia numerică (f_λ, φ), analitică în Λ şi putînd fi prelungită analitic într-un domeniu Λ_1 mai mare, independent de alegerea funcţiei test $\varphi(x)$. În acest caz funcţiei $f_{\lambda_0}(x)$, cu $\lambda_0 \in \Lambda_1 - \Lambda$ putem să-i facem să corespundă funcţionala (f_{λ_0}, φ) obţinută prin prelungirea analitică a funcţionalei (f_λ, φ) dincolo de Λ, cu alte cuvinte, vom pune

$$\int f_{\lambda_0}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname*{prelung.\,anal.}_{\lambda \to \lambda_0} \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

De exemplu, pentru a defini distribuţia $x_+^{-3/2}$, considerăm funcţia:

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^\lambda, & x > 0. \end{cases}$$

Pentru $Re\lambda > -1$, ea defineşte funcţionala regulată

$$(3) \qquad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funcţia numerică (3) este evident analitică în λ, ea are derivata în raport cu λ, egală cu

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln x\, \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Membrul drept al formulei (3) îl rescriem sub forma

$$\int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}.$$

Primul termen este definit pentru $Re\lambda > -2$, al doilea pentru orice λ, al treilea pentru $\lambda \neq -1$. Prin urmare funcţionala (3) se prelungeşte analitic pe domeniul $Re\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$. În particular, pentru $\lambda = -3/2$ obţinem

$$(4) \quad (x_+^{-3/2}, \varphi(x)) = \int_0^1 x^{-3/2}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x - 2\varphi(0).$$

Membrul drept al formulei (4) coincide cu membrul al doilea al formulei (2) căci

$$-\frac{1}{\lambda+1} = \int_0^\infty x^\lambda\,\mathrm{d}x.$$

Bineînţeles, pentru altă alegere a parametrului, prelungirea analitică poate conduce la un rezultat complet diferit. De pildă:

$$x_+^\lambda + \frac{1}{\pi}\frac{(\lambda+3/2)}{x^2 + (\lambda+2/3)} \to x_+^{-3/2} + \delta(x), \text{ cînd } \lambda \to -3/2$$

(v. § 2.5.).

Subliniem că această metodă, sau alta, conducînd la definiţii de forma (2) sau (4) joacă pentru noi doar un rol ajutător; ea nu este

decît un *mijloc* pe cîtă vreme *scopul* este de a obține definiții care, ca și formulele (2) sau (4), vor avea un sens independent de metoda cu care s-a ajuns la ele.

3.2. **Distribuțiile x_+^λ și x_-^λ.** Să considerăm funcția x_+^λ, egală cu x^λ pentru $x > 0$ și nulă pentru $x \leqslant 0$. Dorim să construim și să cercetăm distribuția ce-i corespunde. Cum s-a spus mai sus, funcționala regulată

$$(1) \qquad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

definită de funcția x_+^λ pentru $Re\lambda > -1$ se prelungește în domeniul $Re\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$, cu ajutorul identității, valabile pentru $Re\lambda > -1$

$$(2) \qquad \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1}$$

Anume, pentru $Re\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$, membrul drept există și definește o regularizată a integralei din membrul stîng: dacă $-2 < Re\lambda \leqslant -1$, $\lambda \neq -1$ și dacă funcția test este identic nulă în vecinătatea originii, atunci sigur subsistă în membrul drept integrala

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx.$$

Se construiește analog prelungirea funcționalei x_+^λ pe domeniul $Re\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(3) \qquad \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda + k)}.$$

Și aici membrul drept dă o regularizată a integralei ce figurează în membrul stîng. Astfel, distribuția x_+^λ este definită pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

În banda $-n-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -n$, formula (3) poate fi pusă sub o formă mai simplă:

$$(4) \quad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx,$$

pentru că, în acest caz, pentru $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$(5) \qquad \int_1^\infty x^{\lambda+k-1}\, dx = -\frac{1}{\lambda + k}.$$

Formula (3) arată că (x_+^λ, φ) ca funcție de λ are un pol de ordinul 1 în punctele $\lambda = -1, -2, \ldots$, reziduul în punctul $\lambda = -k$ fiind egal cu $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)}$. Cum $\varphi^{(k-1)}(0) = (-1)^{(k-1)}(\delta^{(k-1)}(x), \varphi(x))$, *funcționala x_+^λ are în $\lambda = -k$ un pol de ordinul 1 având ca reziduu* $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$ $\quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Să calculăm derivata $\frac{dx_+^\lambda}{dx}$. Pentru $Re\lambda > 0$ avem egalitatea evidentă $\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}$, adică $(x_+^\lambda, \varphi'(x)) = -(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi(x))$. Cum ambii membri ai acestei egalități se prelungesc analitic în planul complex (cu excepția punctelor $-1, -2, \ldots$), în virtutea proprietății de unicitate a prelungirii analitice egalitatea va fi valabilă în întreg planul. Astfel

$$\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1} \qquad (\lambda = -1, -2, \ldots).$$

De pildă, pentru $-1 < \lambda < 0$ avem

$$\left(\frac{d}{dx} x_+^\lambda, \varphi \right) = (\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi) = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx.$$

Această formulă am dedus-o pe altă cale în § 2.2.

În § 4 se va da dezvoltarea lui x_+^λ în serie Taylor în vecinătatea unui punct regulat, și în serie Laurent în vecinătatea polilor.

Să trecem acum la definirea și studiul distribuției corespunzătoare funcției

$$x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pentru $Re\lambda > -1$ această funcție definește funcționala regulată

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)\, dx. \tag{6}$$

Această funcțională se poate prelungi în semiplanul $Re\lambda \leqslant -1$ exact ca și x_+^λ. Pentru aceasta, cel mai simplu este de a schimba pe x în $-x$ și de a scrie (x_-^λ, φ) sub forma

$$(x_-^\lambda, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx = (x_+^\lambda, \varphi(-x)).$$

Aceasta permite de a aplica imediat toate rezultatele obținute pentru funcționala x_+^λ, funcționalei x^λ, înlocuind în formulele corespunzătoare funcția $\varphi(x)$ prin $\varphi(-x)$ și deci $\varphi^{(j)}(0)$ prin $(-1)^j\varphi^{(j)}(0)$.

Vedem în particular că distribuția x_-^λ, ca și x_+^λ, există și este analitică în întreg planul, cu excepția punctelor $\lambda = -1, -2, \ldots$; în punctul $\lambda = -k$, distribuția x_-^λ are un pol simplu de reziduu $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$.

Formula ce dă regularizata integralei

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

în banda $-n-1 < Re\lambda < -n$, se poate scrie sub forma

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \Big] dx. \tag{7}$$

În § 4 se vor da dezvoltările distribuției x_-^λ în serie Taylor și în serie Laurent.

Combinații pare și impare ale distribuțiilor x_+^λ și x_-^λ. Distribuția se numește *pară* dacă,

$$(f(x), \varphi(-x)) = (f(x), \varphi(x)),$$

și *impară* dacă,

$$(f(x), \varphi(-x)) = -(f(x), \varphi(x)).$$

Pornind de la distribuțiile introduse în pct. 3.2, să formăm următoarele combinații pare și impare

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \tag{1}$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda. \tag{2}$$

Să examinăm singularitățile distribuțiilor $|x|^\lambda$ și $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Cum distribuția x_+^λ are pentru $\lambda = -k$ un pol simplu de reziduu $\frac{(-1)^{(k-1)}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$, iar distribuția x_-^λ un pol simplu de reziduu $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$, rezultă că distribuția $|x|^\lambda$ are poli doar pentru $\lambda = -1, -3, -5, \ldots, -2m-1, \ldots$. Reziduul lui $|x|^\lambda$ în $\lambda = -2m-1$ este $2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$. În punctele $\lambda = -2m (m = 1, 2, \ldots)$, distribuția $|x|^\lambda$ este *definită*; evident, pentru aceste valori ale lui λ vom scrie în loc de $|x|^{-2m}$, x^{-2m}.

Analog, distribuția $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ are poli în punctele $\lambda = -2, -4, \ldots, -2m, \ldots$ cu reziduul corespunzător lui $\lambda = -2m$ egal cu $-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$. Pentru $\lambda = -2m-1 (m = 1, 2, \ldots)$, distribuția $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ este definită și vom scrie x^{-2m-1} în loc de $|x|^{-2m-1}\operatorname{sgn} x$. Astfel distribuțiile x^{-n} sînt definite pentru orice $n = 1, 2, \ldots$

Să dăm definiții directe ale distribuțiilor $|x|^\lambda$ și $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Pentru aceasta vom utiliza regularizatele integralelor $\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$ și $\int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)\, dx$, adică formulele (4) și (7) de la § 3.2 : în banda $-n-1 <$

$< Re\lambda < -n$:

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx,$$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - \frac{(1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx.$$

Schimbînd n în $2m$, adăugînd și respectiv scăzînd, obținem :

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \ldots + \right.\right.$$

(3)

$$\left.\left. + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right]\right\} dx,$$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \ldots + \right.\right.$$

(4)

$$\left.\left. + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right]\right\} dx.$$

Prima expresie este convergentă pentru $-2m-1 < Re\lambda < -2m+1$, a doua, pentru $-2m-2 < Re\lambda < -2m$. În particular,

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \ldots + \right.\right.$$

(5)

$$\left.\left. + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right]\right\} dx,$$

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) + \right.\right.$$

(6)

$$\left.\left. + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right]\right\} dx,$$

astfel încît, de exemplu :

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx, \tag{7}$$

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \tag{8}$$

Ultima expresie coincide cu valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei din $\frac{\varphi(x)}{x}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}.$$

Să dăm și formulele de derivare ale distribuțiilor $|x|^\lambda$ și $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Vom avea :

$$\frac{d}{dx} |x|^\lambda = \frac{d}{dx} (x_+^\lambda + x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} - \lambda x_-^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} x, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = \frac{d}{dx} (x_+^\lambda - x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} + \lambda x^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1}. \tag{10}$$

Obținem, în particular, pentru $\lambda = -n$,

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1}. \tag{11}$$

În § 4 se vor da dezvoltările lui $|x|^\lambda$ și $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ în serie Taylor și în serie Laurent.

În încheiere să remarcăm că funcționalele x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ sînt, pentru $Re\lambda > -1$ funcționale regulate ce corespund unor funcții cu creșterea polinomială ; ele se prelungesc deci pe spațiul $\mathcal{S}$ al funcțiilor $\varphi(x)$ indefinit derivabile, ce descresc, împreună cu derivatele lor de orice ordin, pentru $|x| \to \infty$, mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|x|}$ (§ 1.10). Funcționalele x_+^λ ... obținute, pentru ce-

lelalte valori ale lui λ prin prelungire analitică ale celor anterioare, se prelungesc de asemenea pe spațiul S; această rezultă atît din formulele de prelungire analitică cît și din formulele de derivare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_+^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1}$ și din remarcile făcute la sfîrșitul paragrafului 2, privind posibilitatea derivării funcționalelor definite pe S. Prin urmare, funcționalele $x_+^\lambda, \ldots$ se pot aplica nu numai funcțiilor cu suportul compact ci oricărei funcții din spațiul S, de pildă funcției e^{-x^2} etc.

Exemplul 1. Funcția Γ este definită de integrala:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

ce converge pentru $Re\lambda > -1$. Putem considera această integrală ca rezultatul aplicării funcționalei $x_+^{\lambda-1}$ funcției test, egale cu e^{-x} pentru $0 \leqslant x < \infty$ (o astfel de funcție știm că aparține spațiului S). Aplicînd formulele regularizatelor (§ 3.2), obținem expresia funcției Γ în domeniul $Re\lambda \leqslant -1$; pentru $Re\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, \ldots, -n$,

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^1 x^{\lambda-1}\left[\mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right]\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(k+\lambda)},$$

pentru $-n-1 < Re\lambda < -n$:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\left[\mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right]\mathrm{d}x.$$

Exemplul 2. Fie integrala

$$\int_0^\infty x^\lambda[\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}]\,\mathrm{d}x,$$

care converge pentru $Re\lambda > -2$. Ea poate fi considerată ca rezultatul aplicării funcționalei x_+^λ funcției test $\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}$, de aceea

$$\int_0^\infty x^\lambda[\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}]\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^\lambda\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^\lambda\mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x,$$

unde fiecare din termenii din dreapta este iarăși rezultatul aplicării funcționalei x_+^λ funcțiilor test respective. Dar pentru $Re\lambda > -1$ se poate face substituția $ax = \xi$, ceea ce dă:

$$\int_0^\infty x^\lambda\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\left(\frac{\xi}{a}\right)^\lambda\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{a^{\lambda+1}},$$

formulă adevărată oricare ar fi λ, datorită unicității prelungirii analitice. Obținem deci ca rezultat final

$$\int_0^\infty x^\lambda[\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}]\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{a^{\lambda+1}} - \frac{1}{b^{\lambda+1}}\right)\cdot\Gamma(\lambda+1).$$

Pentru $Re\lambda > -2$ această formulă dă valoarea integralei convergente din primul membru. Este interesant că am obținut-o cu ajutorul unor integrale divergente. Bineînțeles, ea poate fi găsită și pe căi obișnuite (de pildă derivînd în raport cu parametrii a și b).

3.4. **Integrale indefinite ale** lui x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$.

Cum integrarea indefinită este inversa operației de derivare (§ 2.6), pentru $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$

$$\int x_+^\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{x_+^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_1(\lambda),$$

$$\int x_-^\lambda\,\mathrm{d}x = -\frac{x_-^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_2(\lambda),$$

apoi, pentru $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$

$$\int|x|^\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{|x|^{\lambda+1}\operatorname{sgn}x}{\lambda+1} + C_3(\lambda),$$

iar pentru $\lambda \neq -2, -4, -6, \ldots$ (și pentru $\lambda \neq -1$, căci pentru $\lambda = -1$ nu avem formule corespunzătoare pentru derivare),

$$\int|x|^\lambda\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x = \frac{|x|^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_4(\lambda), \tag{1}$$

funcțiile $C_1(\lambda), \ldots, C_4(\lambda)$ putînd fi alese arbitrar.

Utilizînd această libertate de alegere, vom găsi, prin trecere la limită, primitiva lui $x^{-1} = |x|^{-1} \operatorname{sgn} x$. Primul termen al membrului al doilea al formulei (1) are pentru $\lambda = -1$ un pol de reziduu 1. Punem $C_4(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda+1} + C$; astfel membrul drept va putea fi prelungit analitic în punctul $\lambda = -1$ și prin continuitate formula de integrare își va păstra sensul. Astfel,

$$\int |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x \, dx = \frac{|x|^{\lambda+1} - 1}{\lambda + 1} + C;$$

pentru $\lambda \to -1$:

$$\lim_{\lambda \to -1} \frac{|x|^{\lambda+1} - 1}{\lambda + 1} = \ln |x|,$$

și prin urmare

$$\int x^{-1} \, dx = \ln |x| + C. \tag{2}$$

Se pot calcula de asemenea și integrale repetate ale funcțiilor considerate. Astfel, integrala iterată de q-ori a lui $|x|^{\lambda}$ este de forma

$$\underbrace{\int \dots \int}_{q} |x|^{\lambda} \, dx^q = \frac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1) \dots (\lambda+q)} + Q_{\lambda}(x), \tag{3}$$

unde $Q_{\lambda}(x)$ este un polinom arbitrar în x, de grad $< q$.

Funcția de sub semnul integral din stînga are poli în punctele $\lambda = -1, -3, \dots$. Funcția $\dfrac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1) \dots (\lambda+q)}$ are în plus și poli în punctele $\lambda = -2, -4, \dots, |\lambda| \leqslant q$. Este natural să le eliminăm pe acestea din urmă printr-o alegere convenabilă a polinomului $Q_{\lambda}(x)$. Reziduul primului termen din membrul drept pentru $\lambda = -2k (2k < q)$ fiind, evident,

$$\frac{|x|^{-2k+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(-2k+1)(-2k+2) \dots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (-2k+q)} =$$

$$= \frac{-x^{q-2k}}{(2k-1)! \, (q-2k)!},$$

vom putea pune

$$Q_{\lambda}(x) = \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)! \, (q-2k)!} \cdot \frac{1}{\lambda + 2k}$$

(la care eventual se poate adăuga un polinom arbitrar în x de grad $< q$, depinzînd analitic de λ). Astfel

$$\underbrace{\int \dots \int}_{q} |x|^{\lambda} \, dx^q = \frac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1) \dots (\lambda+q)} + \sum_{k=2}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)! (q-2k)!} \cdot \frac{1}{\lambda+2k}. \tag{4}$$

În particular, integrala dublă se scrie sub forma

$$\iint |x|^{\lambda} \, dx^2 = \frac{|x|^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{\lambda+2}.$$

3.5. Regularizarea în raport cu λ a funcțiilor x_+^{λ}, x_-^{λ}, $|x|^{\lambda}$, $|x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x$[*]. După cum am văzut funcțiile x_+^{λ}, x_-^{λ}, $|x|^{\lambda}$, $|x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x$ au în planul λ poli simpli. Este natural de a încerca să facem să dispară acești poli, împărțind fiecare din aceste funcții cu o funcție uzuală de λ, avînd poli simpli în exact aceleași puncte. Modul cel mai simplu de a construi o astfel de funcție constă în a aplica distribuția ce ne interesează (x_+^{λ}, etc.) unei funcții test fixate $\varphi_0(x)$. Pentru aceasta vom utiliza faptul, menționat la finele din § 3.3, că funcționalele x_+^{λ}, x_-^{λ}, $|x|^{\lambda}$, $|x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x$ se prelungesc la spațiul S, aceasta permite de a alege pe $\varphi_0(x)$ din S.

Să considerăm distribuția x_+^{λ}. Ea are poli în punctele $-1, -2, \dots$ cu reziduul în punctul $-n$ egal cu $\dfrac{(-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)}$. Funcția test $\varphi_0(x)$ trebuie aleasă astfel încît reziduurile funcției de λ, $(x_+^{\lambda}, \varphi_0(x))$ în punctele $-1, -2, \dots$ să fie diferite de zero. Aceasta înseamnă că în punctul $x = 0$, funcția φ_0 și toate derivatele sale trebuie să nu se anuleze. Vom alege drept funcție $\varphi_0(x)$ funcția e^{-x}, astfel încît vom avea

$$(x_+^{\lambda}, e^{-x}) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} \, dx = \Gamma(\lambda + 1).$$

[*] Spunem „funcția x_+^{λ}" etc. pentru a marca faptul că ne interesează dependența de λ a distribuției x_+^{λ} (Nota trad.).

Analog procedăm şi pentru distribuţiile x_-^λ, $|x|^\lambda$ şi $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Pentru x_-^λ trebuie aleasă o funcţie $\varphi_0(x)$, astfel încît toate derivatele sale în punctul $x = 0$ să nu fie nule; este natural să luăm $\varphi_0(x) = e^x$ şi deci

$$(x_-^\lambda, e^x) = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda e^x \, dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x} \, dx = \Gamma(\lambda + 1).$$

Funcţia $|x|^\lambda$ are poli în punctele $-1, -3, \ldots$, şi reziduul său în punctul $\lambda = -2m-1$ este egal cu $\frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$, din acest motiv funcţia $\varphi_0(x)$ trebuie aleasă astfel încît toate derivatele sale de ordin par în punctul $x = 0$ să nu fie nule. Este natural de a alege $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$ şi obţinem

$$(|x|^\lambda, e^{-x^2}) = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda e^{-x^2} \, dx = 2\int_0^\infty x^\lambda e^{-x^2} \, dx =$$

$$= \int_0^\infty t^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-t} \, dt = \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right).$$

În sfîrşit, funcţia $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ are poli în punctele $-2, -4, \ldots$ avînd reziduul în punctul $-2m$ egal cu $-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$.

De aceea funcţia $\varphi_0(x)$ trebuie aleasă astfel încît toate derivatele de ordin impar în punctul $x = 0$ să fie diferite de zero. Putem lua $\varphi_0(x) = xe^{-x^2}$ şi găsim

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, xe^{-x^2}) = 2\int_0^\infty x^{\lambda+1} e^{-x^2} \, dx = \Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right).$$

Putem deci construi funcţiile întregi în λ:

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}.$$

Valoarea acestor funcţii în punctele singulare comune numărătorilor şi numitorilor sînt pur şi simplu egale cu raporturile reziduurilor corespunzătoare. Obţinem astfel:

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-n} = \frac{\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} x_+^\lambda}{\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} (x_+^\lambda, e^{-x})} =$$

(1)

$$= \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(n-1)!}{(-1)^{n-1}(\delta^{(n-1)}(x), e^{-x})(n-1)!} = \delta^{(n-1)}(x),$$

$$\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-n} = \frac{\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} x_-^\lambda}{\operatorname*{Res}_{\lambda=-n}(x^\lambda, e^x)} = \frac{\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}}{\frac{(\delta^{(n-1)}(x), e^x)}{(n-1)!}} = (-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(\lambda),$$

(2)

$$\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Big|_{\lambda=-2m-1} = \frac{\operatorname*{Res}_{\lambda=-2m-1} |x|^\lambda}{\operatorname*{Res}_{\lambda=-2m-1}(|x|^\lambda, e^{-x^2})} = \frac{\frac{2}{(2m)!}\delta^{(2m)}(x)}{\frac{2}{(2m)!}(\delta^{(2m)}(x), e^{-x^2})}.$$

Rezultatul aplicării funcţionalei $\delta^{(2m)}(x)$ funcţiei e^{-x^2} este $(e^{-x^2})^{(2m)}|_{x=0}$. Cum

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!} + \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-x^2})^{(2m)}|_{x=0} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

avem evident:

$$(e^{-x^2})^{(2m)}|_{x=0} = \frac{(-1)^m(2m)!}{m!}.$$

Astfel:

(3)

$$\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Big|_{\lambda=-2m-1} = \frac{(-1)^m\delta^{(2m)}(x)m!}{(2m)!}.$$

În sfîrșit:

$$\left.\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m} = \frac{\operatorname{Res}\limits_{\lambda=-2m} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\operatorname{Res}\limits_{\lambda=-2m} (|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, xe^{-x^2})} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{(2m-1)!}\delta^{(2m-1)}(x)}{\frac{-2}{(m-1)!}(\delta^{(2m-1}(x), xe^{-x^2})}.$$

Rezultatul aplicării funcționalei $\delta^{(2m-1)}(x)$ funcției xe^{-x^2} este $-(xe^{-x^2})^{(2m-1)}|_{x=0}$.

Cum $xe^{-x^2} = x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(m-1)!} + \ldots =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (xe^{-x^2})^{(2m-1)}|_{x=0} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

avem evident:

$$(xe^{-x^2})^{(2m-1)}|_{x=0} = (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{(m-1)!},$$

și deci

$$\left.\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m} = (-1)^m \frac{\delta^{(2m-1)}(x)(m-1)!}{(2m-1)!}. \tag{4}$$

Formulele (1) — (4) pot fi obținute și substituind direct valorile cunoscute ale reziduurilor funcției Γ în punctele respective.

Formula de derivare în raport cu x pentru funcționala

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

este mai simplă decît cea pentru funcționala x_+^λ; într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_+^\lambda = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\lambda x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = f_+^{\lambda-1}, \tag{5}$$

astfel încît a deriva funcționala

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

este echivalent cu micșorarea indicelui λ cu 1. Analog, pentru funcționala

$$f_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

se obține formula de derivare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^\lambda = -f^{\lambda-1}, \tag{6}$$

echivalentă cu micșorarea lui λ cu 1 și cu schimbarea semnului.

Funcția $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ prin derivare dă $\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$ cu λ micșorat cu 1 și totul înmulțit cu un factor numeric. O a doua derivare a lui $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ dă, cu aproximația unui factor, aceeași funcție, dar λ s-a micșorat cu 2:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} = 2\lambda\frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Formula

$$\frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \tag{8}$$

ar fi putut fi utilizată pentru a face prelungirea analitică a funcției $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$.

3.6. Distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$. Vom defini acum noi distribuții $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$. Spre deosebire de distribuțiile x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, definite mai înainte, aceste noi distribuții nu mai necesită vreo regularizare: ele sînt *funcții analitice întregi de* λ. Alte avantaje ale distribuțiilor $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ vor apare în capitolul relativ la transformarea Fourier (cap. II). După cum se știe, expresia $(x + iy)^\lambda$ se definește astfel

$$(x + iy)^\lambda = e^{\lambda \ln(x+iy)} = e^{\lambda[\ln|x+iy| + i\,Arg(x+iy)]}.$$

Avem acum

$$Arg(x + iy) = arg\,(x + iy) \quad (-\pi < arg\, z < \pi).$$

Atunci $(x + iy)^\lambda$ va fi o funcție analitică uniformă de variabilă complexă $z = x + iy$ în semiplanul superior $y > 0$ și analog $(x + iy)^\lambda$ va fi o funcție analitică uniformă în semiplanul inferior $y < 0$. Ne vor interesa valorile la limită ale acestor funcții pe axa reală. Ele se calculează ușor:

$$(x + i0)^\lambda = \lim_{y \to +0} (x^2 + y^2)^{\lambda/2} \exp i\lambda arg(x + iy) =$$

(1)

$$= \begin{cases} e^{i\lambda\pi} |x|^\lambda & \text{pentru } x < 0, \\ x^\lambda & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$

$$(x - i0)^\lambda = \lim_{y \to -0} (x^2 + y^2)^{\lambda/2} \exp i\lambda arg(x + iy) =$$

(2)

$$= \begin{cases} e^{-i\lambda\pi} |x|^\lambda & \text{pentru } x < 0, \\ x & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Aceste funcții sînt definite pentru orice λ complex. Problema noastră constă acum în a defini distribuțiile ce corespund acestor funcții, și care vor fi notate tot cu $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$.

Utilizînd funcțiile x_+^λ și x_-^λ definite în 3.2 putem scrie pentru $Re > -1$:

(3) $$(x + i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda,$$

(4) $$(x - i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda.$$

Dar, se vede de aici că pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ funcțiilor (1) și (2) le vor corespunde distribuțiile ce figurează în membrul drept al relațiilor (3) și (4). Distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ vor fi definite pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Dar dacă pentru $\lambda = -n$, comparăm reziduurile distribuțiilor x_+^λ și x_-^λ (obținute în § 3.2) constatăm că singularitățile termenilor ce figurează în membrii drepți din (3) și (4) se compensează reciproc; și de aceea distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ sînt funcții întregi de variabila λ. În § 4 vom obține, în particular, formulele

$$(x + i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x),$$

$$(x - i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x).$$

Faptul că distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ nu au poli se poate explica și în modul următor. Să presupunem că funcția test $\varphi(x)$ aparține spațiului S și că se prelungește analitic într-o vecinătate a axei reale. Fie integrala

$$\int_{L_\varepsilon} z^\lambda \varphi(z)\,dz \qquad (z = x + iy),$$

calculată pe conturul L_ε, compus din acea parte din axa reală între $(-\infty, -\varepsilon)$ (cu $\varepsilon > 0$), semicercul de rază ε cu centrul în origine situat în semiplanul superior și semiaxa $(\varepsilon, +\infty)$ (ne mărginim la considerarea distribuției $(x + i0)^\lambda$). Din teorema lui Cauchy rezultă că valoarea acestei integrale nu depinde de ε. Cum pe conturul L_ε integrandul nu are singularități și $\varphi(x)$ descrește pentru $|x| \to \infty$ mai repede decît orice putere a lui $|x|$, integrala există pentru orice λ și este — după cum se vede imediat — o funcție analitică în λ. Pentru $Re\,\lambda > -1$, această funcție coincide cu funcția

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x + i0)^\lambda \varphi(x)\,dx;$$

astfel, prelungirea analitică a acesteia din urmă nu are poli.

3.7. Regularizarea canonică. În paragrafele precedente am construit distribuţiile ce corespund anumitor funcţii concrete cu singularităţi algebrice (şi cu această ocazie am învăţat să calculăm numeroase integrale divergente). Vom considera în acest paragraf o regulă unică de regularizare valabilă pentru o subclasă suficient de bogată de funcţii cu singularităţi algebrice. Vom numi această regularizare *canonică* şi vom introduce temporar notaţia

$$f = r \cdot c \cdot f(x)$$

(f — funcţionala care este regularizata funcţiei $f(x)$).

Vom arăta că această regularizare canonică este *naturală* în sensul următor:

1° $r.c.[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1\, r.c.f_1(x) + \alpha_2 r.c.f_2(x)$;

2° $r.c.\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[r.c.f(x)]$

(aici în membrul stîng este vorba de derivata funcţiei în sens obişnuit, iar în membrul drept de derivata funcţionalei);

3° $r.c.[h(x)f(x)] = h(x).\ r.c.f(x)$

pentru orice funcţie indefinit derivabilă $h(x)$.

Considerăm, la început, funcţii avînd o singularitate neintegrabilă doar în singurul punct $x = 0$.

Să ne mărginim la funcţiile ce se reprezintă sub forma unei sume finite

$$f(x) = \sum p_i(x) q_i(x), \tag{1}$$

cu $p_i(x)$ funcţii indefinit derivabile, iar $q_i(x)$ una din următoarele funcţii x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, parametrul λ neluînd valorile $-1, -2, \ldots$

Tuturor acestor funcţii li s-au ataşat în § 3.2 şi 3.3 distribuţii şi s-a arătat că pentru aceste distribuţii se păstrează formulele naturale de derivare în raport cu x. Să remarcăm că operaţiile de adunare, de înmulţire cu o funcţie indefinit derivabilă şi de derivare nu ne scot din clasa (1).

Pentru că au fost definite pentru distribuţii operaţiile de adunare şi de înmulţire cu o funcţie indefinit derivabilă (v. § 1) vom obţine regula de regularizare căutată, dacă vom înlocui în (1) funcţiile $q_i(x)$ prin distribuţiile corespunzătoare.

Astfel vom lua drept regularizate canonice ale lui x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} distribuţiile corespunzătoare introduse în § 3.2 şi § 3.3, iar regularizarea canonică a funcţiei $f(x)$ o definim ca fiind

$$r.c.f(x) = \sum p_i(x).r.c.q_i(x). \tag{2}$$

În particular $|x|^0 = 1$, astfel încît vom lua drept regularizata canonică a unei funcţii indefinit derivabile funcţionala regulată ce-i corespunde.

Este clar că sînt verificate condiţiile 1° şi 3°. Să verificăm condiţia 2°. Este suficient de a face aceasta pentru un singur termen, adică atunci cînd

$$f(x) = p(x)q(x).$$

Pentru a simplifica scrierea vom nota cu $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ derivarea în sensul distribuţiilor şi cu $(\ )'$ derivarea uzuală. În conformitate cu formula (3), § 2.1.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r.c.f(x) = p'(x).\ r.c.q(x) + p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r.c.\,q(x).$$

Dar, după cum s-a mai remarcat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r.c.\ q(x) = r.c.\ q'(x)$$

şi utilizînd condiţiile 1° şi 3° obţinem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r.c.\ f(x) = r.c.\ [p'(x)q(x) + p(x)q'(x)] = r.c.\ f'(x).$$

Se ridică problema unicităţii regularizării canonice astfel definite. Să arătăm că această definiţie este univocă. Pentru aceasta remarcăm că dezvoltînd funcţiile indefinit derivabile $p_i(x)$ după formula lui Taylor, putem reprezenta pe $f(x)$ sub forma unei sume finite:

$$f(x) = \sum c_i r_i(x) + h(x), \tag{1'}$$

unde $r_i(x)$ este iarăşi una dintre funcţiile x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} (însă cu λ, în general, modificat), c_i factori constanţi, iar $h(x)$ o funcţie local

integrabilă. Presupunem că în suma $\sum c_i r_i(x)$ s-au grupat termenii în așa fel încît n-au rămas decît acei $r_i(x)$ pentru care $Re\lambda < -1$, ceilalți fiind cuprinși în $h(x)$. Reprezentarea (1') este atunci unică, căci termenii distincți au ordine diferite pentru $x \to 0$. Ținînd seama de (1') este natural de a scrie regularizata

$$\sum c_i . r.c. r_i(x) + h(x). \tag{2'}$$

Arătăm că regularizatele (2) și (2') coincid, ceea ce va fi suficient pentru a demonstra unicitatea regularizatei canonice așa cum a fost ea definită.

Este suficient de a presupune că suma din formula (1) constă dintr-un singur termen $p(x)\, q(x)$, căci nu numai regularizata (2) dar și regularizata (2') verifică proprietatea 1°. Considerăm cazul $q(x)=x_+^\lambda$; celelalte două cazuri se tratează analog. Fie $-m-2<Re\lambda<-m-1$. Dezvoltăm $p(x)$ conform formulei Taylor.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) + x^{m+1} s(x).$$

Trebuie să arătăm că pentru orice funcție test $\varphi(x)$

$$(x_+^\lambda, p(x)\varphi(x)) = \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(j)}(0)}{j!} (x^{\lambda+j}, \varphi(x)) + \int_0^\infty x^{\lambda+m+1} s(x)\varphi(x)\, dx. \tag{3}$$

Pentru aceasta pornim de la membrul stîng al acestei egalități (3)

$$(x_+^\lambda, p(x)\varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ p(x)\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} [p(x)\varphi(x)]^{(k)}|_{x=0} \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) + x^{m+1} s(x) \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) \cdot \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) \right\} dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(j)}(0)}{j!} \int_0^\infty x^{\lambda+j} \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) \right] + \int_0^\infty x^{\lambda+m+1} s(x)\varphi(x)\, dx$$

și constatăm că aceasta coincide cu membrul drept din (3).

Remarcăm că am fi putut porni de la formula (2') pentru a defini regularizata canonică. În cazuri concrete vom putea utiliza atît formula (2) cît și formula (2').

Să considerăm acum cazul în care funcția $f(x)$ are nu una, ci mai multe singularități de același tip ca în (1), și chiar o infinitate numărabilă de astfel de singularități, local finite. În acest caz vom utiliza proprietatea demonstrată la p. 2 al anexei 1, și anume existența partiției unității

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(x),$$

cu funcții $e_i(x)$ indefinit derivabile, local finite. În plus, la capetele suportului oricărei funcții e_i se poate găsi cel mult un punct singular al funcției $f(x)$. Înmulțind ultima egalitate cu $f(x)$ vedem că putem porni de la reprezentarea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) q_i(x), \tag{4}$$

unde $q_i(x)$ sînt translatatele funcțiilor x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, iar $p_i(x)$ funcții indefinit derivabile, astfel încît pe orice interval infinit seria (4) să devină o sumă finită. Putem atunci iarăși să punem (5)

$$r.c.f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) r.c.q_i(x), \tag{5}$$

adică

$$(r.c.f(x), \varphi(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} (r.c.q_i(x), p_i(x)\varphi(x)) \tag{6}$$

și aici seria va fi întotdeauna finită căci funcțiile test sînt cu suportul compact. Operațiile de adunare, de înmulțire cu o funcție indefinit derivabilă, de derivare din nou nu se scot în afara clasei (4). Bineînțeles, reprezentarea (4) a unei funcții date $f(x)$, ca și reprezentarea (1) nu sînt unice, dar se poate arăta că definiția (5) nu depinde de alegerea reprezentării.

Proprietățile 1° — 3° se demonstrează fără dificultate.

În continuare nu vom mai utiliza notația „$r.c.f(x)$"; vom conveni a nota regularizarea funcției $f(x)$ — sau mai bine spus, distri-

buția ce corespunde funcției $f(x)$ — prin același simbol $f(x)$ așa cum s-a făcut în § 3.2 și 3.3 pentru funcțiile x_+^λ etc.

În particular, în conformitate cu simbolul introdus în § 1.3, vom nota prin

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx,$$

$f(x)$ fiind o funcție uzuală admițînd o regularizată canonică, rezultatul aplicării funcției test $\varphi(x)$ acestei regularizate canonice.

Exemplu. În § 2.4 am întîlnit funcția $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Ea se poate reprezenta pentru $|x|<\frac{\pi}{2}$ sub forma

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{x}=\frac{p(x)}{x},$$

unde $p(x)$ este o funcție indefinit derivabilă. În vecinătatea punctelor $k\pi$, $h=\pm 1, \pm 2, \ldots$ funcția $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ poate fi scrisă analog. Vedem astfel că $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ admite o regularizată canonică. Pentru funcțiile test diferite de zero doar într-o vecinătate mică a originii, această regularizată se scrie astfel:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ \varphi(x)\right)=\left(\frac{p(x)}{x},\ \varphi(x)\right)=\left(\frac{1}{x},\ p(x)\varphi(x)\right)=$$

$$=\int_0^\infty\frac{p(x)\varphi(x)-p(x)\,\varphi(-x)}{x}\,dx=\int_0^\infty[\varphi(x)-\varphi(-x)]\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx.$$

În virtutea proprietății 2°, derivata acestei funcții va fi regularizata canonică a funcției

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x/2},$$

adică, ținînd seama de definiția lui x^{-2}, o funcțională ce se exprimă prin formula:

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},\ \varphi\right)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{4\varphi(0)}{x^2}\right]dx$$

(iarăși în ipoteza că $\varphi(x)=0$ în afara unei vecinătăți mici a originii). Se vor calcula în mod asemănător derivatele succesive ale distribuției $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

3.8. **Regularizarea altor integrale.** Am văzut anterior ce trebuie înțeles, din punct de vedere al teoriei distribuțiilor, prin integrala (divergentă în sens uzual)

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx),$$

unde $f(x)$ este o funcție fixată cu singularități algebrice suficient de generale iar $\varphi(x)$ o funcție test arbitrară. În particular, fixînd această funcție test, obținem un mod de a calcula anumite integrale divergente.

Totuși, erau excluse integrale simple dar importante ca

$$\int_0^b x^\lambda\,dx\ \text{și}\int_0^\infty x^\lambda\,dx$$

(prima diverge pentru $Re\lambda<-1$, a doua pentru orice λ), și multe altele.

În acest paragraf vom încerca să dăm un sens natural unor astfel de integrale.

— *Regularizarea pe un interval finit.* În punctele precedente am considerat funcționalele, definite de funcțiile x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} pe semiaxa, sau pe întreagă axă reală. Se pot considera funcționale definite de integrale pe intervale finite, ca de pildă

$$(1)\qquad (x^\lambda_{(0<x<b)},\ \varphi)=\int_0^b x^\lambda\varphi(x)\,dx.$$

Am ales aici segmentul $0 \leqslant x \leqslant b$ ca cel mai tipic : el posedă, la o extremitate un punct posibil de divergenţă ($x = 0$). Cazul segmentului $a \leqslant x \leqslant b$ pe care nu sînt puncte singulare, nu prezintă interes, şi, dacă el conţine în interior un punct de divergenţă, îl vom descompune în două segmente, astfel încît fiecare dintre ele să aibă la o extremitate un punct de divergenţă.

Să considerăm deci integrala (1). Ea converge pentru $Re\lambda > -1$, şi este în acest caz o funcţie analitică de λ. Scriind-o sub forma

$$\int_0^b x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^b x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi(0) - \ldots -$$

$$(2) \quad - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx + \varphi(0)\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \varphi'(0)\frac{b^{\lambda+2}}{(\lambda+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \varphi^{(n-1)}(0)\frac{b^{\lambda+n}}{(\lambda+n)(n-1)!},$$

vedem că integrala noastră, ca funcţie de λ, se prelungeşte în întreg planul complex, cu excepţia valorilor $\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, unde are poli simpli. Utilizăm formula (2) pentru a defini regularizata integralei din membrul sting pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$. Vom nota această funcţională cu $x^\lambda_{0 \leqslant x \leqslant b}$.

Drept $\varphi(x)$ putem alege aici în fapt orice funcţie indefinit derivabilă pentru $0 \leqslant x \leqslant b$, căci orice astfel de funcţie se poate prelungi dincolo de punctele 0 şi b pînă la o funcţie indefinit derivabilă cu suport compact.

Să alegem, în particular, $\varphi(x) \equiv 1$ pentru $0 \leqslant x \leqslant b$. Obţinem egalitatea

$$(3) \qquad \int_0^b x^\lambda\,dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

valabilă pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$. Este inutil de precizat că integrala din membrul sting este înţeleasă aici (pentru $Re\lambda \leqslant -1$) ca regularizată, după regula noastră, şi nu în sensul uzual *).

Fie acum o funcţie oarecare de forma

$$(4) \qquad f(x) = \begin{cases} x^\lambda p(x) & \text{pentru } 0 < x \leqslant b \\ 0 & \text{pentru ceilalţi } x, \end{cases}$$

*) În cazul de faţă membrul drept şi odată cu el şi cel sting au o unică singularitate pentru $\lambda = -1$.

unde $p(x)$ este o funcţie indefinit derivabilă. Prin analogie cu § 3.7 vom considera regularizata funcţiei $f(x)$ definită de formula

$$(5) \qquad (reg.\, f(x),\ \varphi(x)) = (x^\lambda_{0 \leqslant x \leqslant b},\ p(x)\varphi(x)).$$

Următoarea remarcă va fi utilă în continuare. Egalitatea, valabilă pentru $Re\lambda > -1$,

$$(6) \qquad \int_0^b x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^c x^\lambda \varphi(x)\,dx + \int_c^b x^\lambda \varphi(x)\,dx,$$

unde $0 < c < b$, va rămîne adevărată pentru toţi $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ dacă primele două integrale sînt înţelese ca fiind regularizate în sensul de mai sus. Într-adevăr, toate cele trei integrale au independent, prelungiri analitice în întreg planul cu excepţia punctelor $-1, -2, \ldots$; în plus ultima integrală există în sens obişnuit pentru toţi λ şi egalitatea (6) se păstrează datorită teoremei de unicitate.

Să considerăm acum funcţia $f(x)$ cu singularităţi algebrice în punctele a şi b astfel încît în vecinătatea punctului a să aibă loc reprezentarea

$$f(x) = (x-a)^\lambda p_a(x),$$

iar în vecinătatea punctului b — reprezentarea :

$$f(x) = (b-x)^\mu p_b(x),$$

unde $p_a(x)$ şi $p_b(x)$ sînt funcţii indefinit derivabile, prima în intervalul $a \leqslant x < b$, a doua în intervalul $a < x \leqslant b$. Definim acum regularizata funcţiei $f(x)$, adică integrala

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

prin egalitatea

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^c f(x)\varphi(x)\,dx + \int_c^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

unde c este un punct situat între a şi b, integralele din al doilea membru fiind regularizatele corespunzătoare.

Rezultatul nu depinde de alegerea punctului c.

Într-adevăr, dacă $c' > c$, este un alt punct arbitrar din a, b atunci din cele spuse mai înainte

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_c^{b} f(x)\varphi(x)\,d(x) = \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{c'}^{b} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

și, prin urmare:

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{c'}^{b} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^{c} + \int_c^{c'} + \int_{c'}^{b} = \int_a^{c} + \int_c^{b},$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Să considerăm drept exemplu funcția B a lui Euler

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx.$$

Această integrală converge în sens uzual pentru $Re\lambda > 0$, $Re\mu > 0$; din cele arătate, ea se prelungește analitic în întreg planul variabilei λ și în întreg planul variabilei μ, cu excepția valorilor $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$ și $\mu = -1, -2, \ldots$ Formula de regularizare pentru $Re\lambda > -k$, $Re\mu > -s$ are forma

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\lambda-1}\left[(1-x)^{\mu-1} - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\mu)x^r}{r!\,\Gamma(\mu-r)}\right]dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{\mu-1}\left[x^{\lambda-1} - \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\lambda)(1-x)^r}{r!\,(\Gamma(\lambda-r)}\right]dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)\Gamma(\mu)}{2^{r+\lambda}r!\,\Gamma(\mu-r)(r+\lambda)} + \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(-1)^r\Gamma(\lambda)}{2^{r+\mu}r!\,\Gamma(\lambda-r)(r+\mu)}.$$

Regularizarea la infinit.

Am văzut anterior cum se poate da un sens integralei

$$\int_0^b x^\lambda\,dx,$$

pentru orice $\lambda \neq -1$, considerînd-o ca rezultatul aplicării funcționalei $\hat{x}^{\lambda}_{0<x<b}$ funcției test $\varphi(x)$, identic egală cu 1 pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant b$. Ar fi de dorit să se poată da un sens asemănător integralei

$$\int_0^\infty x^\lambda\,dx \qquad (b > 0).$$

Dar nu există funcție test egală cu 1 pe semiaxa (b, ∞). Din acest motiv vom proceda astfel. Vom considera clasa $K(b, \infty)$ a tuturor funcțiilor $\varphi(x)$, definite pentru toți $x \geqslant b$, indefinit derivabile și astfel încît în $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \psi(x)$ să fie funcție test pe intervalul $\left(0, \frac{1}{b}\right)$; mai precis $\varphi(x)$ să coincidă pe acest interval cu o anumită funcție test aparținînd spațiului K. Vom defini atunci funcționala

$$\int_b^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

prin formula ce rezultă efectuînd substituția $\frac{1}{x} = y$:

$$\int_b^\infty x^\lambda(\varphi)(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{b}} y^{-\lambda-2}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)dy,$$

integrala obținută fiind înțeleasă, dacă este necesar, în sensul regularizatei: ea există prin urmare, pentru $-\lambda - 2 \neq -1, -2, \ldots$ adică pentru $\lambda \neq -1, 0 + 1, \ldots$

Pentru funcția $F(x)$, definită pe semiaxa $[b, \infty)$ și de forma $F(x) = x^\lambda f(x)$, cu $f(x)$ aparținînd clasei $K(b, \infty)$, vom lua drept formulă de regularizare

$$(reg.\,F,\ \varphi) = \int_b^\infty F(x)\varphi(x)\,dx = \int_b^\infty x^\lambda[f(x)\varphi(x)]\,dx.$$

Este evident că funcționala *reg.* F, definită pentru orice funcție $\varphi(x)$ din clasa $K(b, \infty)$ verifică condițiile următoare:

$$reg.\,[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 reg.\,F_1 + \alpha_2 reg.\,F_2,$$
$$reg.\,[g(x)F(x)] = g(x).\,reg.\,F(x),$$

pentru orice funcție indefinit derivabilă $g(x)$.

Să trecem acum la cazul mai general al funcției $F(x)$ avînd un număr oarecare (finit) de singularități algebrice. Aranjînd în ordine crescătoare aceste singularități $-\infty < b_1 < \ldots < b_n < \infty$, divizăm axa reală într-un număr finit de intervale

$$(-\infty, a_1),\ (a_1, b_1),\ (b_1, a_2),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (b_n, a_{n+1})\ (a_{n-1}, \infty).$$

Fiecare dintre aceste intervale conține la una din extremitățile sale, un singur punct singular. Putem aplica formula de regularizare corespunzătoare fiecăruia din aceste intervale și sumăm rezultatele astfel obținute. Ca mai înainte se arată ușor că rezultatul final nu depinde de alegerea punctelor $a_1, \ldots, a_n$.

Să remarcăm apoi că regularizata obținută pentru $F(x)$ pe întreaga axă, verifică condițiile:

$$reg.\,[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 \cdot reg.\,F_1 + \alpha_2 .\, reg.\,F_2,$$
$$reg.\,[g(x)F(x)] = g(x).\,reg.\,F(x)$$

($g(x)$ — funcție indefinit derivabilă).

Exemple.

1. Să calculăm $\int_0^\infty x^\lambda\,dx$. Cum s-a remarcat mai înainte, pentru $b > 0$

$$\int_0^b x^\lambda\,dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \qquad (\lambda \neq -1).$$

Pe de altă parte,

$$\int_b^\infty x^\lambda\,dx = -\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \qquad (\lambda \neq -1).$$

De aceea

$$\int_0^\infty x^\lambda\,dx = \int_0^b x^\lambda\,dx + \int_b^\infty x^\lambda\,dx = 0 \qquad (\lambda \neq -1).$$

Rezultatul fiind o funcție analitică de λ, el este valabil și în cazul $\lambda = -1$.

2. Integrala

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-\lambda-\mu}\,dx$$

converge în sens uzual pentru $Re\lambda > 0$, $Re\mu > 0$ și coincide, cum se vede imediat efectuînd schimbarea de variabilă $\frac{x}{1+x} = y$, cu $B(\lambda, \mu)$. De aceea prelungirea sa analitică coincide cu $B(\lambda, \mu)$ pentru orice $\lambda, \mu = -1, -2, \ldots$

3. Să găsim

$$I = \int_0^\infty [(x+1)^\lambda - x^\mu]^n\,dx.$$

Dezvoltînd integrandul după binomul lui Newton și aplicînd prima proprietate a regularizării canonice găsim

$$I = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^\infty (x+1)^{(n-k)\lambda} x^{k\mu}\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k B(k\mu + 1,\ k(\lambda-\mu) - n\lambda - 1)$$

în virtutea rezultatului din exemplul precedent.

Să observăm că pentru $\lambda = \mu$, $-\frac{1}{n} < \lambda < 1 - \frac{1}{n}$, integrala I converge în sens uzual; obținem astfel următoarea formulă „clasică"

$$\int_0^\infty [(x+1)^\lambda - x^\lambda]^n\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k B(k\lambda + 1, -n\lambda - 1),$$
$$\left(-\frac{1}{n} < \lambda < -1 - \frac{1}{n}\right),$$

3.9. **Distribuţia r^λ.** Notînd $r^\lambda = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, considerăm funcţionala r^λ, definită prin formula

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_{R^n} r^\lambda \varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

care are sens pentru $Re\lambda > -n$. Cum putem deriva, avem

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(r^\lambda, \varphi) = \int r^\lambda \ln r \varphi(x)\, dx$$

şi funcţionala r^λ va apare ca o funcţie analitică de λ în domeniul $Re\lambda > -n$. Pentru $Re\lambda < -n$, funcţia r^λ nu mai este local integrabilă; definim în acest caz funcţionala r^λ cu ajutorul prelungirii analitice, ceea ce se poate face, generalizînd metoda utilizată în punctele precedente (această idee va fi reluată în continuare şi aplicată unei clase mai largi de funcţii de forma $P^\lambda(x)$, cu $P(x)$ funcţie omogenă pozitivă, (v. cap. III, § 3). Vom utiliza aici o cale mai simplă, bazată pe trecerea de la funcţia r^λ la x_+^λ.

Trecînd la coordonate sferice, integrala (1) se scrie

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^\lambda \left\{ \int_\Omega \varphi(r\omega)\, d\omega \right\} r^{n-1}\, dr,$$

unde $d\omega$ este elementul de arie al sferei Ω. Putem scrie

$$\int_\Omega \varphi(r, \omega)\, d\omega = \Omega_n S_\varphi(r),$$

unde Ω_n este aria sferei unitate în spaţiul n-dimensional, iar $S_\varphi(r)$ este valoarea medie a funcţiei $\varphi(x)$ pe sfera de rază r. Obţinem astfel

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\, dr. \tag{2}$$

Stabilim acum unele proprietăţi ale funcţiei $S_\varphi(r)$. Afirmăm că *funcţia $S_\varphi(r)$* (definită pentru $r \geqslant 0$) *este cu suport compact, indefinit derivabilă şi avînd toate derivatele sale de ordin impar nule pentru* $r = 0$.

Pentru r suficient de mare funcţia $\varphi(x)$ se anulează, deci valoarea sa medie $S_\varphi(r)$ se va anula; astfel $S_\varphi(r)$ rezultă cu suport compact.

Este de asemenea evident că $S(r)$ este indefinit derivabilă pentru $r > 0$. Pentru a dovedi existenţa derivatelor de orice ordin ale funcţiei $S_\varphi(r)$, în punctul $r = 0$, dezvoltăm funcţia $\varphi(x)$ după formula lui Taylor. Vom avea

$$\Omega_n S_\varphi(r) = \int_\Omega \left[\varphi(0) + \sum \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!} \sum \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots \right] d\omega.$$

Este limpede că fiecare termen al integrandului (cu excepţia restului) care conţine un număr impar de factori x_j, integrat va da zero. Termenii integrandului care conţin un număr par, să zicem $2m$, de factori x_j, după integrare şi sumare dau un termen de forma $a_m r^{2m}$. Obţinem

$$S_\varphi(r) = \varphi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_n r^{2k} + \sigma(r^{2k}) \text{ *)} \tag{3}$$

Această expresie arată că pentru $r = 0$ funcţia $S_\varphi(r)$ are derivată pînă la ordinul $2k$, derivatele de ordin impar anulîndu-se. Cum k poate fi ales arbitrar, $S_\varphi(r)$ va rezulta indefinit derivabilă şi în $r = 0$ şi toate derivatele sale de ordin impar se vor anula în $r = 0$.

Rezultă de aici că funcţia $S_\varphi(r)$ poate fi considerată ca o funcţie test pară de variabila r. Dar atunci integrala (2) se poate considera ca rezultatul aplicării funcţionalei $\Omega_n x_+^\mu (\mu = \lambda + n - 1)$ funcţiei test $S_\varphi(r)$. Noi ştim însă că funcţia x_+^μ, analitică pentru $Re\mu > -1$ (adică pentru $Re\lambda > -n$), are o prelungire analitică în întreg planul variabilei μ (respectiv λ), cu excepţia punctelor $\mu = -1, -2, \ldots$ $(\lambda = -n, -n+1, \ldots)$ în care are poli simpli, reziduul în polul $\mu = -m$ $(\lambda = -n - m + 1)$ este egal cu

$$\frac{(-1)^{m-1} \delta^{(m-1)}(x), S_\varphi(x)}{(m-1)!} = \frac{S_\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}.$$

Derivatele de ordin impar ale funcţiei $S_\varphi(x)$ anulîndu-se pentru $x = 0$, rezultă că de fapt nu avem poli pentru valorile pare ale lui m. Rămîn polii ce corespund valorilor $m = 1, 3, 5, \ldots$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \ldots$

*) Notaţia $y(x) = o(x)$ înseamnă că raportul $\frac{y}{x}$ tinde către zero.

Să remarcăm că reziduul funcției $(r^\lambda, S_\varphi(r))$ pentru $\lambda = -n-2k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, după cum rezultă din ceea ce s-a spus mai înainte, este egal cu

$$(4) \qquad \Omega_n \frac{(\delta^{(2k)}(x), S_\varphi(x)}{(2k)!} = \Omega_n \frac{S_\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!}.$$

În particular, în punctul $\lambda = -n$, funcția (r^λ, S) are un pol simplu de reziduu $\Omega_n S_\varphi(0) = \Omega_n \varphi(0)$. Aceasta înseamnă că distribuția r^λ, pentru $\lambda = -n$ are un pol simplu, de reziduu $\Omega_n \delta(x)$.

Este posibil de a obține direct $S_\varphi^{(2k)}(0)$ din funcția φ, fără a mai trece prin calculul valorii medii.

Pentru aceasta vom da o altă expresie reziduului distribuției r^λ pentru $\lambda = -n-2k$. Utilizăm formula de derivare

$$\Delta(r^{\lambda+2}) = (\lambda+2)(\lambda+n) r^\lambda,$$

unde Δ este operatorul lui Laplace (Pentru $Re\lambda > 0$ această formulă se demonstrează direct calculînd primul membru, iar pentru celelalte valori ale lui λ ea rămîne valabilă prin prelungire analitică). Integrînd această formulă putem obține pentru orice întreg k egalitatea

$$r^\lambda = \frac{\Delta^k r^{\lambda+2k}}{(\lambda+2)(\lambda+4)\ldots(\lambda+2k)(\lambda+n)(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+2k-2)}.$$

Reziduul funcției r^λ pentru $\lambda = -n-2k$ se poate obține ca reziduul membrului drept al acestei formule pentru valoarea respectivă a lui λ. Cum numitorul membrului drept nu se anulează pentru $\lambda = -n-2k$ este suficient de a găsi reziduul numărătorului. Dar pentru orice funcție test $\varphi(x)$,

$$(\Delta^k r^{\lambda+2k}, \varphi(x)) = (r^{\lambda+2k}, \Delta^k \varphi(x)),$$

adică trebuie să luăm reziduul funcției $(r^\lambda, \Delta^k \varphi(x))$ pentru $\lambda = -n$. Un astfel de reziduu l-am calculat mai înainte pentru orice funcție test; el este egal cu valoarea funcției test respective în punctul $x = 0$ înmulțit cu Ω_n. În cazul de față obținem valoarea reziduului, egală cu $\Omega_n \Delta^k \varphi(0)$. Rezultă de aici că reziduul funcției (r^λ, φ) pentru $\lambda = -n-2k$ este egal cu

$$(5) \qquad \frac{\Omega_n \Delta^k \varphi(0)}{(-2k-n+r)\ldots(-n)(-2k)\ldots(-2)} = \frac{\Omega_n(\Delta^k \delta(x), \varphi(x))}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)},$$

deci reziduul distribuției r^λ pentru același λ este egal cu

$$(5') \qquad \frac{\Omega_n \Delta^k \delta(x)}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}.$$

Comparînd (5) cu valoarea (4) găsită mai înainte a reziduului, obținem

$$(6) \qquad S_\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\, \Omega_n \Delta^k \varphi(0)}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}.$$

Acest rezultat ne dă posibilitatea de a scrie dezvoltarea Taylor a funcției $S_\varphi(r)$:

$$(7) \qquad \begin{aligned} S_\varphi(r) &= (\varphi(0) + \frac{1}{2!} S_\varphi''(0) r^2 + \ldots + \frac{1}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0) r^{2k} + \ldots = \\ &= \Omega_n \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k \varphi(0)}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)} + \ldots \end{aligned}$$

(Formula lui Pizzetti *).

În continuare va fi util să regularizăm în raport cu λ distribuția r^λ, așa cum am făcut mai înainte cu puterile lui x pe dreaptă. Pentru aceasta, să împărțim pe r^λ cu

$$(r^\lambda, e^{-r^2}) = \int r^\lambda e^{-r^2} r^{n-1}\, d\Omega\, dr = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Funcția

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

este, evident, o funcție analitică întreagă în λ. Valorile acestei funcții în punctele singulare ale numărătorului și numitorului se pot găsi ca fiind raporturile reziduurilor respective. Obținem astfel

$$(8) \qquad \frac{2}{\Omega_n} \frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n-2k} = \frac{\operatorname{Res}_{\lambda=-n-2k} r^\lambda}{\operatorname{Res}_{\lambda=-n-2k} (r^\lambda, e^{-r^2})} = \frac{\Omega_n \Delta^k \delta(x)}{\frac{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}{(\Omega_n \delta^{(2k)}(x), e^{-\lambda^2})}} = (-1)^k \frac{\Delta^k \delta(x)}{2^k k!\, n \ldots (n+2k-2)}.$$

*) v. R. Courant – D. Hilbert, *Metodele fizicii matematice*, vol. II, cap. IV, § 3, Springer-Verlag (în lb. germană).

În particular, pentru $k = 0$,

$$(9) \qquad \frac{2}{\Omega_n} \frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n} = \delta(x).$$

3.10. **Descompunerea funcției r^λ în unde plane.** Fie $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un punct de pe sfera unitate în spațiul $\mathbf{R}^n$. Fie apoi $Re\lambda > -1$; construim distribuția $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$ prin formula

$$(1) \quad (F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n), \varphi(x)) = \int \frac{|\omega, x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \varphi(x)\, dx.$$

Efectuînd o rotație de axe $y = ux$ după care punctul ω va avea coordonatele $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ și punînd $\psi(y) = \varphi(u^{-1}y) = \varphi(x)$, integrala de mai sus devine

$$\int \frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \psi(y)\, dy =$$

$$(2) \qquad = \int_{y_1=-\infty}^{\infty} \frac{|y_1|}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \left\{ \int_{y_2, \ldots, y_n} \psi(y)\, dy_1 \ldots dy_n \right\} dy_1.$$

Expresia dintre paranteze este o anumită funcție $\varphi_0(y_1)$, indefinit derivabilă și cu suport compact, adică o funcție test în variabila y_1. Dar atunci expresia (2) poate fi prelungită analitic la toate valorile λ și ea definește totodată pentru orice λ funcționala $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$.

Este ușor de văzut că funcționala $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$ depinde continuu de punctul ω. Într-adevăr, subspațiul ortogonal vectorului ω variază continuu odată cu ω, integrala lui $\psi(y)$ pe acest subspațiu variază continuu odată cu ω și deci funcția $\varphi_0(y_1)$ variază continuu cu ω; mai mult, ea variază continuu în sensul convergenței spațiului K. Prin urmare, pentru orice λ fixat, numărul $(F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n), \varphi(x))$ variază continuu, ceea ce demonstrează continuitatea funcționalei F_λ în raport cu parametrul ω (*v.* § 1.8).

De aceea *putem integra funcționala F_λ în raport cu parametrul* ω, cînd acesta parcurge sfera unitate Ω, adică putem construi o funcțională G_λ, astfel încît, pentru orice funcție test $\varphi(x)$

$$(G_\lambda, \varphi(x)) = \int_\Omega (F_\lambda, \varphi(x))\, d\omega.$$

(Pentru mai multe detalii privind integrarea în raport cu un parametru v. Anexa 4).

Să calculăm această integrală, la început pentru $Re\lambda > -1$. În acest caz este ușor de văzut că

$$\int_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda\, d\omega$$

este o funcție cu simetrie sferică în $x_1, x_2, \ldots, x_n$, omogenă de grad λ și egală cu r^λ cu aproximația unui factor. Astfel spus:

$$(3) \qquad \int_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda\, d\omega = C(n, \lambda)\, r^\lambda.$$

Pentru a găsi valoarea constantei $C(n, \lambda)$ punem $x_n = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$. Obținem atunci*

$$C(n, \lambda) = \int_\Omega |\omega_n|^\lambda\, d\omega = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}.$$

* Pentru calculul integralei trecem la coordonate sferice $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$.

$$\omega_n = \cos\theta_{n-1}, \text{ și } d\omega = \sin^{n-2}\theta_{n-1}\, d\theta_{n-1}\, d\omega_{n-1},$$

unde $d\omega_{n-1}$ este elementul de arie a sferei unitate în spațiul $(n-1)$ dimensional. Integrala capătă forma

$$2\,\Omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta \cos^\lambda\theta\, d\theta = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},$$

căci

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad \text{și} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta \cos^\lambda\theta\, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Introducînd în (3) valoarea găsită pentru $C(n, \lambda)$ și împărțind la $\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$, obținem formula

$$(4)\qquad \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{\Omega}|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{\lambda}\,d\omega=\frac{2\Gamma^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

fundamentală pentru cele ce urmează. Această formulă, stabilită pentru $Re\lambda>-1$ rămîne valabilă și pentru celelalte valori ale lui λ, în virtutea unicității prelungirii analitice (v. anexa 2). Ea este o descompunere a funcției $\frac{2\Gamma^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ în ceea ce numim „unde plane" și totodată, permite, după cum vom vedea în continuare, reducerea problemelor spațiale la probleme plane sau unidimensionale.

Să considerăm cazul particular al acestei formule pentru $\lambda=-n$. Dacă n este impar, atunci din formula (3), pct. 3.5.

$$\left.\frac{|x|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x).$$

Pe de altă parte, din formula (9) § 3.9:

$$\left.\frac{2\Gamma^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\Omega_n\,\delta(x_1,\ldots,x_n),$$

unde Ω_n este aria sferei unitate. Introducînd acestea în formula (4), și divizînd ambii membri cu Ω_n, obținem:

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,(n-1)!\;\Omega_n}\int_{\Omega}\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)d\omega,$$

În spațiul de dimensiune impară

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1.3.5\ldots(n-2)}.$$

Introducînd această valoare a lui Ω_n și simplificînd, obținem formula definitivă

$$(5)\qquad \delta(x_1,\ldots x_n)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Omega}\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\omega.$$

Să dăm acum formula ce dă descompunerea lui δ în unde plane în spațiul de dimensiune pară. Din ceea ce s-a arătat mai înainte, membrul drept al formulei (4) se reduce pentru $\lambda=-n$, la $\Omega_n\delta(x_1,\ldots,x_n)$. Pe de altă parte, pentru n par

$$\left.\frac{|x|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}x^{-n},$$

unde expresia x^{-n} este dată de formula (5) § 3.3. Introducînd această expresie în (4), obținem pentru n par

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Omega_n}\int_{\Omega}(\omega_1x_1+\ldots+x_nx_n)^{-n}\,d\omega.$$

Reamintindu-ne că $\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, obținem că pentru n par

$$(6)\quad \delta(x_1,\ldots,x_n)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\,(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_{\Omega}(\omega_1x_1+\ldots+x_nx_n)^{-n}\,d\omega.*$$

* Cazurile n par și n impar pot fi reunite într-o formulă unică

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\Omega}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n-i0)^{-n}\,d\omega,$$

conform cu definiția funcției $(x-i0)^{-n}$. (v. pct. 26).

Pentru a înțelege mai bine sensul formulei (5) să aplicăm ambii membrii ai egalității, funcției $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Obținem :

$$(7) \qquad \varphi(0, \ldots, 0) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega} d\omega \int_{\Sigma \omega_k x_k = 0} \frac{\partial^{n-1} \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial \upsilon^{n-1}} \, d\sigma_0,$$

unde $d\sigma_0$ este elementul de arie al planului $\Sigma \omega_k x_i = 0$, iar $\frac{\partial}{\partial \nu}$ derivarea după direcția vectorului ν care îi este ortogonal. Analog se poate scrie formula (6). Punem, pentru funcția test $\varphi(x)$

$$\psi(\xi, \omega) \equiv \psi(\xi) = \int_{\Sigma \omega_k x_k = \xi} \varphi(x_1, \ldots x_n) \, d\sigma_\xi,$$

unde $d\sigma_\xi$ este elementul de arie al planului $\Sigma \omega_k x_k = \xi$ (valoarea acestei integrale depinde de direcția vectorului ω). Este evident că $\psi(\xi)$ este o funcție indefinit derivabilă cu suport compact. Conform formulei (5) pct. 3.3.

$$(\xi^{-n}, \psi(\xi)) = \int_0^\infty \xi^{-n} \left\{ \psi(\xi) + \psi(-\xi) - 2 \left[\psi(0) + \frac{\xi^2}{2!} \psi''(0) + \ldots + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \psi^{(n-2)}(0) \right] \right\} d\xi.$$

Putem scrie acum rezultatul aplicării formulei (6), funcției $\varphi(x)$, sub forma

$$(8) \qquad \varphi(0, \ldots, 0) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} ((\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n}, \psi(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)) \, d\omega.$$

Formulele (7) și (8) dau soluția așa-numitei *probleme a lui Radon*, care constă în a regăsi funcția $\varphi(x)$ sau (sau $\psi(x)$) cunoscînd integralele sale pe hiperplanele $(\omega, x) = C$.

3.11. **Distribuții omogene.** Să considerăm acum distribuțiile x_+^λ, x_-^λ, ș.a.m.d. dintr-un nou punct de vedere, anume acela al noțiunii de funcție omogenă. Am definit în § 1.6 noțiunea de distribuție omogenă de grad λ prin condiția,

$$(1) \qquad f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x),$$

adică

$$\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right) = \alpha^{\lambda+n} (f(x), \varphi(x)),$$

pentru orice funcție test și orice α pozitiv.

Stabilim acum cîteva proprietăți simple ale distribuțiilor omogene.

1. *Suma a două distribuții omogene de grad λ este de asemenea o distribuție omogenă de același grad.*

2. *Produsul dintr-o distribuție omogenă f de grad λ cu o funcție indefinit derivabilă $a(x)$ omogenă de grad μ este o distribuție omogenă de grad $\lambda + \mu$.*

Demonstrația proprietăților (1) și (2) rezultă direct din definiția (1).

3. *Derivata în raport cu x_j a unei distribuții omogene f de grad λ este o distribuție omogenă de grad $\lambda - 1$.*

Avem, într-adevăr,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right) = -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \alpha^{\lambda+n} \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \alpha^{\lambda-1+n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right).$$

4. *Distribuțiile omogene de grade diferite sînt liniar independente.* Să presupunem că are loc egalitatea

$$c_1 f_1(x) + \ldots + c_m f_m(x) = 0,$$

unde $f_k(x)$ este o distribuție omogenă de grad λ_k și toți λ_k sînt diferiți între ei. Conform definiției, pentru orice α pozitiv și pentru orice funcție test $\varphi(x)$ are loc egalitatea

$$c_1 \alpha^{\lambda_1} (f_1, \varphi) + c_2 \alpha^{\lambda_2} (f_2, \varphi) + \ldots + c_m \alpha^{\lambda_m} (f_m, \varphi) = 0.$$

Exponenții λ_k fiind prin ipoteză distincți, pentru orice k și pentru orice φ rezultă $c_k(f_k, \varphi) = 0$. Dacă $f_k \neq 0$, atunci funcția $\varphi(x)$ poate fi aleasă astfel ca $(f_k, \varphi) \neq 0$; rezultă $c_k = 0$ pentru orice k c.t.a.

5. *Fie f_λ o distribuție omogenă de grad λ, depinzînd analitic de λ în domeniul Λ. Să presupunem că f_λ are o prelungire analitică într-un domeniu $\Lambda_1 \supset \Lambda$. Atunci funcționala f_λ rămîne omogenă de grad λ și pentru λ în Λ_1.*

Într-adevăr, pentru orice λ fixat și orice funcție test $\varphi(x)$, în domeniul Λ, este verificată egalitatea

$$\left(f_\lambda, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f_\lambda, \varphi).$$

În dreapta și în stînga figurează funcții analitice de λ în Λ. În baza unicității prelungirii analitice ele vor coincide și în domeniul Λ_1, adică ceea ce trebuia arătat.

Distribuția x_+^λ considerată în punctele precedente este pentru $Re\lambda > -1$ o distribuție omogenă de grad λ. Mai știm că x_+^λ se prelungește analitic în întreg planul cu excepția valorilor $\lambda = -1, -2, \ldots$. Pe baza proprietății 5 distribuția x_+^λ este o distribuție omogenă de grad λ pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$. Același lucru se poate spune despre distribuția x_-^λ. Distribuțiile $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, $(x + i0)^\lambda$, $(x - i0)^\lambda$ fiind combinații liniare ale distribuțiilor x_+^λ, x_-^λ sînt de asemenea distribuții omogene de grad λ, și acesta în întreg domeniul lor de existență: $|x|^\lambda$ este omogenă pentru $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ este omogenă pentru $\lambda \neq -2, -4, \ldots$, $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ sînt omogene pentru orice λ, fără excepții. În particular, distribuția x^{-m} este omogenă de grad $-m$ pentru orice m întreg. Mai avem încă o distribuție omogenă de grad $-m$, și anume $\delta^{(m-1)}(x)$; într-adevăr

$$\left(\delta^{(m-1)}(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (-1)^{m-1}\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{\alpha^{m-1}} = \alpha^{-m+1}(\delta^{(m-1)}(x), \varphi(x)).$$

Să găsim toate distribuțiile omogene de grad λ pe dreaptă. În conformitate cu definiția, o astfel de distribuție trebuie să verifice ecuația

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x), \tag{2}$$

pentru orice $\alpha > 0$. Derivînd această relație în raport cu α și făcînd apoi $\alpha = 1$, obținem

$$xf'(x) = \lambda f(x). \tag{3}$$

Să găsim toate soluțiile acestei ecuații. Pentru $x \neq 0$ putem integra în mod obișnuit; deci distribuția căutată trebuie să coincidă cu $C_1 x^\lambda$ pentru $x > 0$ și cu $C_2|x|^\lambda$ pentru $x < 0$. Cunoaștem deja distribuții de acest tip: $C_1 x_+^\lambda$ și $C_2 x_-^\lambda$ pentru $\lambda \neq -n$, $n = 1, 2, \ldots$ Să presupunem că λ nu este un întreg negativ și să considerăm distribuția $f_0(x) = f(x) - C_1 x_+^\lambda - C_2 x_-^\lambda$. Ea verifică ecuația (2) și totodată este identic nulă pentru $x \neq 0$. Distribuția $f_0(x)$ are deci suportul redus la un singur punct. Ori, se va demonstra în volumul II următoarea teoremă pe care o vom aplica fără demonstrație. *Dacă o distribuție f_0 are suportul redus la un singur punct, să zicem $x_0 = 0$ atunci ea este de forma*

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x),$$

pentru un anumit m (finit).

Pe baza acestei teoreme avem:

$$f(x) - C_1 x_+^\lambda - C_2 x_-^\lambda - \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x) = 0.$$

Aplicînd proprietatea 4, obținem $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$ și prin urmare

$$f(x) = C_1 x_+^\lambda + C_2 x_-^\lambda.$$

este soluția generală a problemei noastre, pentru $\lambda = -1, -2, \ldots$

Fie acum $\lambda = -n$ un întreg negativ. Vom presupune că f este pară pentru n par și impară pentru n impar. Pentru $x \neq 0$, $f(x)$ coincide cu funcția Cx^{-n}. Cunoaștem o distribuție omogenă cu această proprietate, și anume Cx^{-n}. Diferența $f_0(x) = f(x) - Cx^{-n}$, ca mai înainte, are suportul concentrat în punctul $x = 0$ și este deci o combinație liniară a distribuției δ și a derivatelor sale. Aplicînd iarăși proprietatea 4, obținem că soluția generală a ecuației (2) pentru $\lambda = -n$ este de forma

$$f(x) = Cx^{-n} + C_1 \delta^{(n-1)}(x).$$

În toate cazurile obținem două distribuții omogene de grad λ, liniar independente.

În spațiul n-dimensional, distribuția r^λ, pentru $Re\lambda > -n$ este o distribuție omogenă de grad n. Rezultă din proprietatea 5 că ea rămîne omogenă acolo unde se prelungește analitic, adică în întreg planul complex cu excepția punctelor $\lambda = -n, -n, -n-2, \ldots$. Distribuția $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ este o distribuție omogenă de grad $-n$, ceea ce se poate obține atît direct din definiție, cît și cu ajutorul formulei (9), § 3.9.

Utilizînd omogenitatea distribuțiilor $\delta^{(n-1)}(x)$ și x^{-n}, putem scrie formulele de descompunere a lui δ în unde plane (§ 3.10, formulele (5) și (6)) sub o formă invariantă la transformări afine. Să considerăm orice suprafață S avînd proprietatea că orice rază vectoare prin origine o taie exact odată; atunci ea poate fi obținută din sfera unitate, înmulțind vectorul de poziție al punctului $\omega = (\omega_1 \ldots, \omega_n)$ cu numărul pozitiv $f(\omega)$. Notăm $\rho_k = f(\omega)\,\omega$. Avînd în vedere omogenitatea distribuției $\delta^{(n-1)}(x)$ avem

$$\delta^{(n-1)}(\rho_1 x_1 \ldots + \rho_n x_n) = [f(x)\omega]^{-n}\,\delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n).$$

Pe de altă parte, produsul $[f(\omega)]^n d\omega$ este elementul de arie dS al suprafeței S; deci, pentru n impar avem:

$$\delta(x_1 \dots x_n) = c_n \int_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) d\omega = c_n \int_S \delta^{(n-1)}(\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n)\, ds \tag{4}$$

și analog, pentru n par

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = c_n \int_\Omega (\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega = \tag{5}$$

$$= c_n \int_S (\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n)^{-n} ds.$$

Formulele (4) și (5) sînt invariante la transformări afine.

§ 4. Funcții și distribuții asociate *

4.1. **Funcții asociate.** După cum rezultă din definiție, funcțiile omogene sînt funcțiile proprii ale operatorului de omotetie u:

$$uf(x) = f(\alpha x),$$

Într-adevăr, dacă $f(x)$ este o funcție omogenă de grad λ, atunci

$$uf(x) = f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x).$$

Atunci cînd considerăm o transformare liniară oarecare, o dată cu funcția proprie f_0 ce corespunde valorii proprii a, se au în vedere de obicei și funcțiile asociate de diferite ordine. Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_k$, se numesc *asociate funcției proprii f_0 a transformării u*, dacă verifică relațiile:

$$uf_0 = af_0,$$
$$uf_1 = af_1 + bf_0,$$
$$uf_2 = af_2 + bf_1,$$
$$uf_k = af_k + bf_{k-1}.$$

* Acest paragraf poate fi omis la prima citire.

Altfel spus, transformarea u reproduce funcția asociată de ordin k cu aproximația funcției asociate de ordin $k-1$.

Să mai observăm, că, după cum se poate dovedi ușor, suma dintre o funcție asociată de ordin k și o funcție asociată de ordin $k-1$ este o funcție asociată de ordin 1. Într-un spațiu finit dimensional, matricea operatorului exprimată într-o bază formată din vectorii proprii și cei asociați operatorului, are forma normală Jordan. Vectorii asociați se aleg astfel încît constanta b să fie egală cu 1.

Revenind acum la funcții și la operatorul de omotetie în domeniul variabilelor independente, vom spune că $f_1(x)$ este o *funcție asociată de ordinul 1 și de grad* λ, dacă pentru orice $\alpha > 0$, este îndeplinită egalitatea

$$f_1(\alpha x) = \alpha^\lambda f_1(x) + h(\alpha) f_0(x),$$

unde $f_0(x)$ este o funcție omogenă de grad λ. Funcția $h(\alpha)$ este determinată în mod unic de relația

$$h(\alpha\beta) = \alpha^\lambda h(\beta) + \beta^\lambda h(\alpha),$$

obținută considerînd $f_1(\alpha\beta x)$. Divizînd ambii membri ai acestei egalități, obținem că $h_1(\alpha) = \dfrac{h(\alpha)}{\alpha^\lambda}$ verifică ecuația

$$h_1(\alpha\beta) = h_1(\alpha) + h_1(\beta).$$

Se știe că unica soluție continuă a acestei ecuații este funcția logaritmică. Ținînd seama că $h(1) = 0$, obținem:

$$h(\alpha) = \alpha^\lambda \ln \alpha.$$

În definitiv vom spune că $f_1(x)$ este *funcție asociată de ordinul 1 și de grad* λ dacă pentru orice $\alpha > 0$, ea verifică ecuația

$$f_1(\alpha x) = \alpha^\lambda f_1(x) + \alpha^\lambda \ln \alpha f_0(x), \tag{1}$$

$f_0(x)$ fiind o funcție omogenă de grad λ. De exemplu, $\ln|x|$ este funcția asociată de ordinul 1, de grad 0, căci pentru $\alpha > 0$

$$\ln|\alpha x| = \ln|x| + \ln \alpha.$$

Prin analogie, așa cum s-a procedat pentru definirea distribuțiilor omogene, vom defini acum distribuțiile asociate. Distribuția f_1 se va numi *distribuție asociată de ordinul 1 și de grad* λ, dacă pentru

orice $\alpha > 0$

$$\left(f_1,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_1,\ \varphi) + \alpha^{\lambda+1}\ln\alpha(f_0,\ \varphi), \tag{2}$$

f_0 fiind o distribuţie omogenă de grad λ. În general, pentru orice k, distribuţia f_k se numeşte distribuţie omogenă asociată de ordin k şi de grad λ dacă pentru orice $\alpha > 0$

$$\left(f_k,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_k,\ \varphi) + \alpha^{\lambda+1}\ln\alpha(f_{k-1},\ \varphi), \tag{3}$$

unde f_{k-1} este o distribuţie asociată de ordin $k-1$.

Să clarificăm acum la ce revin distribuţiile asociate de diferite ordine şi de grad arbitrar λ. Pentru această remarcăm că *dacă f_λ este o distribuţie omogenă de grad λ, derivabilă în raport cu λ, atunci derivata sa în raport cu λ va fi o distribuţie asociată de ordinul* 1.

Într-adevăr, derivînd în raport cu λ identitatea

$$\left(f_\lambda,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_\lambda,\ \varphi),$$

găsim

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_\lambda}{\mathrm{d}\lambda},\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}\left(\frac{\mathrm{d}f_\lambda}{\mathrm{d}\lambda},\ \varphi\right) + \alpha^{\lambda+1}\ln\alpha(f_\lambda,\ \varphi),$$

adică $\dfrac{\mathrm{d}f_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}$ este o distribuţie asociată de ordinul 1. Analog, derivata în raport λ a unei distribuţii asociate de ordin k va fi o distribuţie asociată de ordin $(k+1)$.

4.2. Dezvoltarea funcţiilor x_+^λ şi x_-^λ în serie Taylor şi în serie Laurent. Este firesc ca în dezvoltările în serie Taylor şi Laurent ale distribuţiilor omogene x_+^λ, x_-^λ să intervină distribuţii asociate. Dezvoltarea în serie Taylor a distribuţiei x_+^λ în vecinătatea unui punct regulat λ_0 se scrie:

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}x_+^{\lambda_0} + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}x_+^{\lambda_0} + \ldots =$$

$$= x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_+^{\lambda_0}\ln x_+ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0}\ln^2 x_+ + \ldots \tag{1}$$

În această dezvoltare apar noi distribuţii

$$x_+^\lambda \ln^m x_+ = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}x_+^\lambda. \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

Aici, distribuţia a m — a este o distribuţie asociată de ordinul m. O definiţie explicită a acestor distribuţii se poate obţine fie urmînd calea pe care s-a definit distribuţia x_+^λ, fie derivînd de m ori în raport cu λ formulele (3) şi (4) din § 3.2; astfel pentru $Re\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$, avem:

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+,\ \varphi) =$$

$$= \int_0^1 x^\lambda \ln^m x\left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]\mathrm{d}x + \tag{2}$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x\,\varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^m\, m!\,\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)^{m+1}}.$$

Pentru $-n-1 < Re\lambda < -n$, avem

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\,\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

În vecinătatea polului $\lambda = -n$ distribuţia x_+^λ se dezvoltă în serie Laurent cu parte principală de grad -1. Pentru a explica această dezvoltare, izolăm în regularizata integralei

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^\lambda\left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]\mathrm{d}x$$

termenul care nu converge pentru $\lambda = -n$, adică scriem această regularizată sub forma *

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(x-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) \right] dx + \frac{\varphi^{(n-1)}}{(n-1)!\,(\lambda+n)}.$$

Suma integralelor din partea dreaptă a acestei egalităţi este partea regulată a seriei Laurent. Ea este o funcţie analitică în λ în banda $|Re\lambda + n| < 1$. Vom nota această funcţională cu $F_{-n}(x_+, \lambda)$. Astfel:

$$(F_{-n}(x_+, \lambda), \varphi) =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(x-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x) \right] dx$$

unde $\theta(x)$ este funcţia nulă pentru $x < 0$ şi egală cu 1 pentru $x > 0$. Altfel spus, ultimul termen al integrandului trebuie considerat doar pentru $0 < x < 1$, iar pentru $x > 1$ se anulează; astfel integrala de mai sus converge pentru $x = 0$ şi pentru $x = \infty$.

Valoarea acestei funcţionale pentru $\lambda = -n$, pe care o vom nota x_+^{-n}, adică valoarea părţii regulate a seriei Laurent pentru $\lambda = -n$,

$$x_+^{-n} = \lim_{\lambda \to -n} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda + n) x_+^\lambda]$$

joacă un rol deosebit.

Se vede de aici că distribuţia x_+^{-n} este distribuţia asociată de ordinul 1, de grad $-n$. Această funcţională acţionează asupra unei

* În locul integralei $\int_1^\infty x^{\lambda+n-1}\,dx$ am putea calcula integrala $\int_a^\infty x^{\lambda+n-1}\,dx$ pentru orice $a > 0$. Ar trebui apoi dezvoltat în serie Taylor $a^{\lambda+n}$ şi formulele ulterioare ar fi mult mai complicate.

funcţii test $\varphi(x)$ după formula:

$$(4)\quad (x_+^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\ \theta(1-x) \right] dx.$$

Subliniem că distribuţia x_+^{-n} nu este valoarea lui x_+^λ pentru $\lambda = -n$; aceasta din urmă, pentru $\lambda \to -n$ are un pol, şi, ca atare, pentru $\lambda = -n$ nu există. Totuşi funcţionala x_+^{-n} este o anumită regularizată a funcţiei uzuale x_+^{-n}.

Să remarcăm o interesantă formulă care dă derivata lui x_+^{-n} în raport cu x:

$$\left(\frac{d}{dx} x_+^{-n}, \varphi(x) \right) = -(x_+^{-n}, \varphi'(x)) =$$

$$= -\int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(0)\theta(1-x) \right] dx =$$

$$= -\int_0^1 x^{-n} \left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(0) \right] dx -$$

$$- \int_1^\infty x^{-n} \left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(x-2)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx.$$

Integrăm prin părţi fiecare termen şi găsim

$$\left(\frac{d}{dx} x_+^{-n}, \varphi \right) = -$$

$$= \int_0^\infty n x^{-n-1} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0)\theta(1-x) \right] dx + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Prin urmare

$$(5)\qquad \frac{d}{dx} x_+^{-n} = -n x_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x).$$

Astfel, cînd comparăm funcţia uzuală x_+^{-n} cu distribuţia notată la fel, trebuie să „sacrificăm" formula uzuală de derivare; regularizata (4) nu este regularizata canonică a funcţiei x_+^{-n}.

Ne sînt utile și derivatele lui $F_{-n}(x_+, \lambda)$ în raport cu λ pentru $\lambda = -n$. Le vom nota corespunzător

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F_{-n}(x_+, \lambda)|_{\lambda=-n} = x_+^{-n} \ln x_+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} F_{-n}(x_+, \lambda)|_{\lambda=-n} = x_+^{-n} \ln^2 x_+,$$

.....

și este ușor de arătat că expresiile explicite ale acestor distribuții se obțin înlocuind în formula (5) pe x^{-n} cu $x^{-n} \ln x_+$, respectiv $x^{-n} \ln^2 x$, ș.a.m.d.

Cum am văzut, aceste distribuții sînt distribuții asociate de grad $-n$ și ordine $2, 3, 4, \ldots$.

Acum după ce am introdus distribuțiile x_+^{-n}, $x_+^{-n} \ln x_+ \ldots$ putem scrie dezvoltarea în serie Laurent a distribuției x_+^λ în vecinătatea punctului $\lambda = -n$. Pentru aceasta trebuie dezvoltată $F_{-n}(x_+, \lambda)$ în serie Taylor și obținem :

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\, \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda + n)} +$$

$$+ x_+^{-n} + (\lambda + n) x_+^{-n} \ln x_+ + \ldots + \frac{(\lambda + n)^k}{k!} x_+^{-n} \ln^k x_+ + \ldots$$

Dezvoltarea Taylor a distribuției x_-^λ în vecinătatea valorii regulate λ_0 este de forma

$$x_-^\lambda = x_-^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) x_-^{\lambda_0} \ln x + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0} \ln^2 x + \ldots$$

în care figurează noile distribuții $x_- \ln^k x_- (k = 1, 2, \ldots)$; cea de a k—a distribuție este distribuția asociată de grad λ și de ordin k. Ele sînt analitice în λ pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ și în banda $-n - 1 < Re\lambda < -n$ sînt definite de formulele

$$(x_-^\lambda \ln^k x_-, \varphi) =$$

(6)

$$= \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx.$$

Pentru a scrie dezvoltarea Laurent lui x_-^λ în vecinătatea polului $\lambda = -n$, îndepărtăm și în acest caz termenii care converg pentru $\lambda = -n$:

$$\int_{-\infty}^0 x_-^\lambda \varphi(x) dx =$$

$$= \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - (1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) \right] dx +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{\lambda + n}.$$

Suma integralelor din membrul drept este partea regulată a seriei Laurent căutate. Ea este analitică pentru $|Re\lambda + n| < 1$. Să notăm această funcțională cu $F_{-n}(x_-, \lambda)$. Avem

$$(F_{-n}(x_-, \lambda), \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \theta(1-x) \right] dx.$$

Valoarea acestei funcții pentru $\lambda = -n$, adică valoarea pentru $\lambda = -n$ a părții regulate a dezvoltării Laurent a lui x_-^λ o notăm cu x^{-n}, astfel încît

$$x_-^{-n} = \lim_{\lambda \to -n} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda + n) x_-^\lambda].$$

Această distribuție acționează asupra unei funcții test $\varphi(x)$ după formula

$$(x_-^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi'(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - \right.$$

(7)

$$\left. - \ldots - (1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \theta(1-x) \right] dx$$

și este regularizarea funcției x_-^{-n}. Subliniem încă odată că distribuția x_-^{-n} nu este valoarea funcției x_-^λ pentru $\lambda = -n$.

Derivatele în raport cu λ a lui $F_{-n}(x_-, \lambda)$ pentru $\lambda = -n$ le notăm:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F_{-n}(x_-, \lambda)|_{\lambda=-n} = x^{-n} \ln x_-,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} F_{-n}(x_-, \lambda)|_{\lambda=-n} = x^{-n} \ln^2 x,$$

.....

Se obțin expresii explicite ale acestor distribuții înlocuind în formulele (7) x^{-n} cu $x^{-n} \ln x$, $x^{-n} \ln^2 x$, ...

Dezvoltînd pe $F_{-n}(x_-, \lambda)$ în serie după puterile lui $(\lambda + n)$, obținem seria Laurent a distribuției x_-^λ:

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)x_-^{-n} \ln x_- + \dots \tag{8}$$

În această serie, coeficientul lui $(\lambda+n)^{-\lambda}$ este o distribuție omogenă de grad $-n$, iar coeficientul lui $(\lambda+n)^{-m}$ $m = 0, 1, 2, \dots$ este distribuția asociată de grad $-n$ și de ordin $m+1$.

4.3. **Dezvoltările distribuțiilor** $|x|^\lambda$ **și** $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Să scriem dezvoltările Taylor și Laurent ale distribuțiilor $|x|^\lambda$ și $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Le vom obține, desigur, combinînd dezvoltările corespunzătoare pentru x_+^λ și x_-^λ. Cu această ocazie introducem și o serie de noi distribuții. Dacă λ_0 este o valoare regulată pentru distribuția $|x|^\lambda$, atunci

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)|x|^{\lambda_0} \ln|x| + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 |x|^{\lambda_0} \ln^2|x| + \dots, \tag{1}$$

unde $|x|^\lambda \ln^k|x|$ sînt noi distribuții, cea de a $k-a$ distribuție este asociată de ordin k și grad λ. Toate sînt analitice în raport cu λ pentru $\lambda \neq -1, -3, \dots$ și sînt definite pentru $-2m-1 < Re\ \lambda < -2m+1$ de formulele

$$(|x|^\lambda \ln^k|x|, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \left\{ (x) + \varphi(-x) - \right.$$

$$\left. - 2\left[\varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} x^2 + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx. \tag{2}$$

Analog, dacă λ_0 este o valoare regulată a distribuției $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ atunci dezvoltarea sa Taylor în jurul lui λ_0 se scrie sub forma

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x + (\lambda - \lambda_0)|x|^{\lambda_0} \ln|x| \operatorname{sgn} x +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda-\lambda)^2 |x|^{\lambda_0} \ln|x| \operatorname{sgn} x + \dots \tag{3}$$

Aici $|x|^\lambda \ln^k|x| \operatorname{sgn} x$ sînt distribuții noi, și cea de a k^a este asociată de grad λ și ordin k. Ele sînt toate analitice în λ pentru $\lambda \neq -2, -4, \dots$, și sînt definite pentru $-2m-2 < Re\ \lambda < -2m$ de formulele

$$(|x|^\lambda \ln^k|x| \operatorname{sgn} x,\ \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - \right.$$

$$\left. - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx. \tag{4}$$

Dacă $\lambda_0 = -2m-1$, λ_0 fiind în acest caz pol simplu al distribuției $|x|^\lambda$, dezvoltarea Laurent respectivă se scrie sub forma

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!} \cdot \frac{1}{\lambda+2m+1} + x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1} +$$

$$+ (\lambda+2m+1)[x_+^{-2m-1} \ln x_+ + x_-^{-2m-1} \ln x_-] + \dots \tag{5}$$

Analog, dacă $\lambda_0 = -2m$ (pol simplu al distribuției $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$) dezvoltarea Laurent a lui $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ în vecinătatea acestui punct este de forma

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m+1)}(x)}{(2m-1)!} \cdot \frac{1}{\lambda+2m} + x_+^{-2m} - x_-^{-2m} +$$

$$+ (\lambda+2m)[x_+^{-2m} \ln x_+ - x_-^{-2m} \ln x_-] + \dots \tag{6}$$

Vom nota distribuţia $x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}$ cu $|x|^{-2m-1}$. Rezultatul aplicării sale unei funcţii test $\varphi(x)$ se exprimă prn formula

$$(|x|^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0) + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\theta(1-x)\Big]\Big\} dx \tag{7}$$

$$(-2m-2 < Re\lambda < -2m),$$

unde $\theta(x)$ are aceleaşi sens ca mai înainte.

Analog, vom nota $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ distribuţia $x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$; ea acţionează asupra funcţiei test $\varphi(x)$ prin formula

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \Big\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!}\varphi^{(2m-3)}(0) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\theta(1-1)\Big]\Big\} dx \tag{8}$$

$$(-2m-1 < Re\lambda < -2m+1)$$

ş.a.m.d. Finalmente dezvoltările Laurent căutate se scriu sub forma:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1} + |x|^{-2m-1} + (\lambda+2m+1)|x|^{-2m-1}\ln|x| + \ldots \tag{9}$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} + |x|^{-2m}\operatorname{sgn} x + (\lambda+2m)|x|^{-2m}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \ldots \tag{10}$$

În aceste serii primii coeficienţi $\delta^{(2m)}(x)$ şi $\delta^{(2m-1)}(x)$ sînt distribuţii omogene de grade $-2m-1$, respectiv $-2m-2$, iar următorii sînt distribuţii asociate de acelaş grad şi de ordinul 1, 2, 3, ...

În particular, dacă în egalitatea (5) punem $m = 0$ obţinem dezvoltarea distribuţiei $|x|^\lambda$ în vecinătatea polului $\lambda = -1$:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta(x)}{\lambda+1} + |x|^{-1} + (\lambda+1)|x|^{-1}\ln|x| + \ldots \tag{11}$$

Funcţionala $|x|^{-1}$ este definită prin formula

$$(|x|^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x^2)}{x} dx, \tag{12}$$

unde factorul $\theta(1-x^2)$ arată că de termenul $\varphi(0)$ trebuie ţinut seama doar pentru $|x| \leqslant 1$, pentru $|x| > 1$ în locul său punindu-se zero.

Distribuţiile introduse mai înainte

$$|x|^{-2m-1} = x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1},$$

$$|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x = x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$$

nu sînt valorile funcţiilor analitice $|x|^\lambda$ şi $|x|\operatorname{sgn} x^\lambda$ pentru valorile corespunzătoare ale lui λ ($-2m-1$, respectiv $-2m$). În punctele respective, funcţiile (de λ) $|x|^\lambda$ şi $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ au poli simpli, iar valorile $|x|^{-2m-1}$ şi $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ sînt valorile, în punctele respective, ale părţilor regulate ale seriei Laurent corespunzătoare în aceşti poli.

Se pot considera şi distribuţiile

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m},$$

$$x_+^{-2m} - x_-^{-2m-1}.$$

Este uşor de văzut că prima dintre ele coincide cu distribuţia x^{-2m} (valoarea lui $|x|^\lambda$ în punctul regulat $\lambda = -2m$), a 2[a] cu distribuţia x^{-2m-1}.

Am introdus în § 3.5 distribuţiile

$$(13)\qquad \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)},\ \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)};$$

aceste distribuţii nu au singularităţi.

Dezvoltînd numitorii şi numărătorii fracţiilor (13) în serie Taylor (sau Laurent) şi făcînd cîtul lor după regula cunoscută, putem obţine dezvoltările Taylor ale distribuţiilor respective în vecinătatea oricărui punct λ.

Dezvoltarea funcţiei $\Gamma(\lambda+1)$ după puterile lui λ

$$\Gamma(\lambda+1) = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots$$

este bine cunoscută*; aici $c_1 = c = 0{,}505\dots$ constanta lui Euler, iar coeficienţii $c_2, c_3, \dots$ se calculează cu ajutorul formulelor de recurenţă

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}c_{n-k}s_{k+1},\ s_1 = c,\ s_n = \zeta(n).$$

În particular, pentru $\lambda = 0$ se obţine dezvoltarea

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\theta(x) + \lambda\ln x + \dots}{1 + c\lambda + \dots} = \theta(x) + \lambda(\ln x_+ - c\,\theta(x)) + \dots$$

(14)

4.4. **Distribuţiile $(x+\mathrm{i}0)^\lambda$ şi $(x-\mathrm{i}0)^\lambda$.** Aceste distribuţii au fost introduse în § 3.6. Le vom considera acum mai amănunţit. Distribuţiile amintite au fost definite pentru $Re\lambda > -1$ ca limitele expresiilor $(x+\mathrm{i}y)^\lambda$ şi $(x-\mathrm{i}y)^\lambda$ pentru $y \to +0$; aceasta ne-a condus la formulele

$$(1)\qquad (x+\mathrm{i}0)^\lambda = x_+^\lambda + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^\lambda,$$

$$(2)\qquad (x-\mathrm{i}0)^\lambda = x_+^\lambda + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^\lambda.$$

Membrii drepţi ai formulelor (1), (2) admit prelungiri analitice în întreg planul variabilei λ; tocmai prin aceste prelungiri analitice vom defini pentru $Re\lambda \leqslant -1$ primii membri ai egalităţilor (1), (2). Am

* v. I. M. Rîjik şi I. S. Gradstein. *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Ed. tehnică, 1955, pag. 331, formula 6.3.21. În continuare vom scrie pe scurt: I. M. Rîjik şi I. S. Gradstein, *Tabele*.

remarcat deja că în prelungirea analitică a membrilor din dreapta din (1) şi (2) nu apar singularităţi în punctele $\lambda = -1, -2, \dots$; vom căuta acum valorile distribuţiilor $(x+\mathrm{i}0)^\lambda$ şi $(x-\mathrm{i}0)^\lambda$ în aceste puncte.

În § 4.2 s-au dat dezvoltările Laurent ale distribuţiilor x_+^λ şi x_-^λ în vecinătatea punctului $\lambda = -n$ sub forma:

$$(3)\qquad x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + F_{-n}(x_+, \lambda),$$

$$(4)\qquad x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + F_{-n}(x_-, \lambda).$$

Aici $F_{-n}(x_+, \lambda)$ şi $F_{-n}(x_-, \lambda)$ sînt părţile regulate ale seriilor Laurent; valorile lor pentru $\lambda = -n$ au fost notate în § 4.2 prin x_+^{-n}, respectiv x_-^{-n}. Să mai scriem

$$(5)\qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda\pi} = (-1)^n\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\lambda+n)\pi} = (-1)^n[1 \pm \mathrm{i}(\lambda+n)\pi + \dots].$$

Substituind expresiile (3) — (5) în membrul drept al formulei (1), respectiv (2), reducînd termenii cu singularităţi, şi trecînd la limită pentru $\lambda \to -n$, obţinem:

$$(x \pm \mathrm{i}0)^{-n} = x_+^{-n} + (-1)^n x_-^{-n} \mp \frac{(-1)^{n-1}\mathrm{i}\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

Am remarcat la § 4.3 că pentru $n = 2m$

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m} = x^{-2m} = |x|^\lambda|_{\lambda=-2m},$$

şi pentru $n = 2m+1$

$$x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1} = x^{-2m-1} = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\,|_{\lambda=-2m-1}.$$

Astfel, am obţinut în definitiv

$$(6)\qquad (x \pm \mathrm{i}0)^{-n} = x^{-n} - \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),$$

$$(7)\qquad (x - \mathrm{i}0)^{-n} = x^{-n} + \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

În particular, pentru $n = 2$

$$(8)\quad \left(\frac{1}{(x+i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\,dx - i\pi\varphi'(0)$$

$$(9)\quad \left(\frac{1}{(x-i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx + i\pi\varphi'(0).$$

Să observăm că, după cum se vede din formulele (1) și (2) pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ și din formulele (6) și (7) pentru $\lambda = -n = -1, -2, \ldots$

$$(10)\quad \frac{d}{dx}(x + i0)^\lambda = \lambda(x + i0)^{\lambda-1},$$

$$(11)\quad \frac{d}{dx}(x - i0)^\lambda = \lambda(x - i0)^{\lambda-1}.$$

Pentru că prin derivare exponentul scade cu o unitate, formulele (10) și (11) pot fi folosite pentru a defini distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ și $(x - i0)^\lambda$ pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ De exemplu, $(x + i0)^{-3/2}$ poate fi definită ca $-2\,\frac{d}{dx}(x + i0)^{-1/2}$, unde $\frac{d}{dx}$ înseamnă derivarea în sensul distribuțiilor, iar $(x + i0)^{-1/2}$ este o funcție local integrabilă definită de formula (1) pentru $\lambda = -1/2$.

Formulele (10) și (11) conduc la următorul rezultat important: pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$(12)\quad \lim_{y\to+0}(x + iy)^\lambda = (x + i0)^\lambda,$$

$$(13)\quad \lim_{y\to-0}(x + iy)^\lambda = (x - i0)^\lambda,$$

în sensul *teoriei distribuțiilor*. Într-adevăr, pentru $Re\lambda$ suficient de mare, aceasta rezultă din însești definiția acestor funcții, iar prin derivare în sensul distribuțiilor un șir convergent rămîne un șir convergent.

În punctele întregi negative $-n$, distribuțiile $(x + i0)^{-n}$ și $(x - i0)^{-n}$ se pot introduce de asemenea prin derivare. Reamintim

că mai înainte (§2.2. exemplul (6)) a fost considerată funcția (local integrabilă)

$$(14)\quad \ln(x + i0) = \lim_{y\to-0}\ln(x + iy) = \ln|x| + i\pi\theta(-x),$$

a cărei derivată este

$$(15)\quad \frac{d}{dx}\ln(x + i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Rezultă din formulele (6) că pentru $n = 1$ avem

$$(16)\quad \frac{d}{dx}\ln(x + i0) = \frac{1}{x + i0}.$$

Asemănător lui (14) putem introduce

$$(17)\quad \ln(x - i0) = \lim_{y\to-0}\ln(x + iy) = \ln|x| - i\pi\theta(-x).$$

Derivata acestei funcții este

$$(18)\quad \frac{d}{dx}\ln(x - i0) = \frac{1}{x} + i\pi\delta(x),$$

adică, avînd în vedere (7), pentru $n = 1$,

$$(19)\quad \frac{d}{dx}\ln(x - i0) = \frac{1}{x - i0}.$$

Astfel, distribuțiile $(x \pm i0)^{-1}$ pot fi definite de formulele (16), respectiv (19), iar $(x \pm i0)^{-n}$ pentru celelalte valori întregi negative, iarăși cu ajutorul formulelor (10) și (11).

Cum relațiile (14) și (17) au loc și în sensul teoriei distribuțiilor, obținem că relațiile (12) și (13) sînt valorile *pentru orice* λ în sensul distribuțiilor.

Aceasta permite, de pildă, de a scrie în locul formulelor (8) și (9):

$$\lim_{y\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{(x+iy)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx - i\pi\varphi'(0)$$

$$\lim_{y\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{(x-iy)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx + i\pi\varphi'(0).$$

4.5. **Dezvoltarea distribuţiilor** $(x + i0)^\lambda$ **şi** $(x - i0)^\lambda$ **în serie Taylor.** Distribuţia $(x + i0)^\lambda$ fiind funcţie întreagă de parametrul λ se dezvoltă în jurul valorii λ_0 în serie Taylor după puterile lui $\lambda - \lambda_0$, convergentă pentru orice λ:

$$(x + i0)^\lambda = (x + i0)^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)(x + i0)^{\lambda_0} \ln (x + i0) + \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 (x + i0)^{\lambda_0} \ln^2 (x + i0) + \dots$$

Noile distribuţii ce apar în (1), $(x + i0)^{\lambda_0} \ln (x + i0), \dots$ sînt derivatele succesive în raport cu λ ale lui $(x + i0)^\lambda$ în punctul $\lambda = \lambda_0$. Expresiile explicite ale acestor distribuţii se pot obţine dacă se compară dezvoltarea (1) cu dezvoltarea analoagă după puterile lui $\lambda - \lambda_0$ ce rezultă din egalitatea

$$(x + i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda. \tag{2}$$

Avem, pentru $\lambda_0 \neq -1, -2, \dots$

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) x_+^{\lambda_0} \ln x_+ + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0} \ln^2 x_+ + \dots, \tag{3}$$

$$e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda = e^{i\lambda_0\pi} \left(1 + i\pi(\lambda - \lambda_0) - \frac{\pi^2}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots\right) \times$$

$$\times \left(x_-^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) x_-^{\lambda_0} \ln x_- + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0} \ln^2 x_- + \dots\right). \tag{4}$$

Comparînd coeficienţii seriei (1) cu cei ai seriei obţinute introducînd seriile (3) şi (4) în formula (2), obţinem, înlocuind pe λ_0 cu λ:

$$(x + i0)^\lambda \ln (x + i0) = x_+^\lambda \ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_-, \tag{5}$$

$$(x + i0)^\lambda \ln^2 (x + i0) = x_+^\lambda \ln^2 x_+ + e^{i\lambda\pi} [x_-^\lambda \ln^2 x_- + 2i\pi x_-^\lambda \ln x_- - \pi^2 x_-^\lambda] \tag{6}$$

ş.a.m.d.

Aceste formule sînt valabile pentru $\lambda \neq -1, -2, \dots$

Dezvoltarea lui $(x - i0)^\lambda$ în serie Taylor după puterile lui $\lambda - \lambda_0$ este de forma

$$(x - i0)^\lambda = (x - i0)^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)(x - i0)^{\lambda_0} \ln (x - i0) + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 (x - i0)^\lambda \ln^2 (x - i0) + \dots$$

Am notat aici cu

$$(x - i0)^\lambda \ln (x - i0), \ (x - i0)^\lambda \ln^2 (x - i0), \dots$$

derivatele succesive în raport cu λ ale funcţiei $(x - i0)^\lambda$. Exact ca mai înainte, putem obţine formulele

$$(x - i0)^\lambda \ln (x - i0) = x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- \tag{8}$$

$$(x - i0)^\lambda \ln^2 (x - i0) = x_+^\lambda \ln^2 x_+ + e^{-i\lambda\pi} [x_-^\lambda \ln^2 x_- - 2i\pi x_-^\lambda \ln x_- - \pi^2 x_-^\lambda] \tag{9}$$

$$(\lambda \neq -1, -2, \dots)$$

ş.a.m.d.

Pentru a obţine formulele corespunzătoare pentru λ_0 egal cu un întreg negativ $-n$, în locul formulelor (5) şi (4) considerăm seriile Laurent corespunzătoare:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda + n)} + x_+^{-n} + (\lambda + n) x_+^{-n} \ln x_+ + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda + n)^2 x_+^{-n} \ln^2 x_+ + \dots$$

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda + n)} + x_-^{-n} + (\lambda + n) x_-^{-n} \ln x_- + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda + n)^2 x_-^{-n} \ln^2 x_- + \dots$$

$$e^{i\lambda\pi} = (-1)^n \left[1 + i\pi(\lambda + n) - \frac{\pi^2}{2} (\lambda + n)^2 - i \frac{\pi^3}{6} (\lambda + n)^3 + \dots\right]. \tag{12}$$

Înmulțind (11) cu (12) și adunînd (10) găsim :

$$(13)\qquad x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda = \left[x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^n}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x)\right] +$$

$$+ (\lambda+n)\left[i\pi(-1)^n x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|\right] +$$

$$+ \frac{(\lambda+n)^2}{2}\left[(-1)^{n-1} i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + \right.$$

$$\left. + 2\pi i(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x|\right] + \ldots$$

Am obținut astfel

$$(14)\quad (x+i0)^{-n}\ln(x+i0) = (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|$$

$$(x+i0)^{-n}\ln^2(x+i0) = (-1)^{n-1} i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} +$$

$$(15)\qquad + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + 2\pi(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x|$$

ș.a.m.d.

Formulele (14) și (15), așa cum rezultă din considerente generale sînt rezultatul trecerii la limită, pentru $\lambda_0 \to -n$ în formulele (5) și (6). Analog

$$(x-i0)^{-n}\ln(x-i0) = (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|$$

$$(16)$$

$$(x-i0)^{-n}\ln^2(x-i0) = (-1)^n i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} +$$

$$(17)\qquad + 2i\pi(-1)^{n-1} x_-^{-n}\ln x + x^{-n}\ln^2|x|.$$

Lăsăm cititorului sarcina de a găsi, printre distribuțiile introduse, distribuțiile omogene și distribuțiile omogene asociate, precum și ordinele și gradele respective.

4.6. Dezvoltarea distribuției r^λ. Distribuția r^λ a fost definită în §3.9 prin formula

$$(1)\qquad (r^\lambda, \varphi) = \int r^\lambda \varphi(x)\,dx,$$

valabilă pentru $Re\lambda > -n$. Este clar că pentru aceste valori ale lui λ, r^λ este omogenă de grad λ.

Am transformat în §3.9, expresia (1) în

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\,dr,$$

unde

$$S_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_n}\int_\Omega \varphi(x)\,d\Omega$$

este valoarea medie a funcției test $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pe sfera de rază r. În acest mod (r^λ, φ) coincide cu rezultatul aplicării funcționalei $\Omega_n x_+^\mu$ $(\mu = \lambda + n - 1)$ funcției test pare $S_\varphi(r)$ și prin urmare, se prelungește analitic în întreg planul cu excepția punctelor $\lambda = -n$, $-n-2, \ldots$ Este evident că omogenitatea lui r^λ se păstrează prin prelungire analitică.

Dezvoltarea lui r^λ în serie Taylor sau în serie Laurent se poate obține direct din dezvoltările corespunzătoare ale lui $\Omega_n x_+^\mu$. De exemplu, seria Taylor în vecinătatea unui punct λ_0 este de forma

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0) r^{\lambda_0}\ln r + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 r^{\lambda_0}\ln^2 r + \ldots,$$

unde am notat cu $r^{\lambda_0}\cdot\ln^k r$ funcționala ce operează conform formulei

$$(r^{\lambda_0}\ln^k r, \varphi) =$$

$$= \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda_0+n-1}\ln^k r\left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots - \frac{r^{m-1}}{(m-1)!} S_\varphi^{(m-1)}(0)\right] dr$$

pentru $-m-n < Re\lambda_0 < -m-n+1$.

Să scriem dezvoltarea lui r^λ în serie Laurent în vecinătatea punctului $\lambda = -n - 2k$. Această dezvoltare, desigur, coincide cu dezvoltarea în serie Laurent a funcției $\Omega_n x_+^\mu$ în vecinătatea punctului $\mu = -2k - 1$ (§4.3), și avem

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \frac{1}{\lambda + n + 2k} + \Omega_n r^{-2k-n} + \Omega_n(\lambda + n + 2k) r^{-2k-n} \ln r + \dots \tag{2}$$

Aici am notat cu $r^{2k-n} \cdot \ln^m r$ funcționala

$$(r^{-2k-n} \ln^m r,\ S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-n-2k} \ln^m r \Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \dots$$

$$\dots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\,0(1-r) \Big] dr. \tag{3}$$

Să remarcăm că r^{-2k-n} *nu este* valoarea distribuției r^λ pentru $\lambda = -2k - n$ (căci funcția respectivă are un pol pentru această valoare a lui λ), ci este valoarea pentru $\lambda = -2k - n$ a părții regulate a dezvoltării Laurent a lui r^λ.

În dezvoltarea de mai sus, distribuția $r^{\lambda_0} \ln^k r$ este asociată de grad λ_0 și ordin k, iar $r^{-2k-n} \ln^m r$ — asociată de grad $-2k - n$ și de ordin m.

§ 5. Convoluția distribuțiilor

În analiza clasică se utilizează adesea convoluția a două funcții $f(x)$ și $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int f(\xi)\, g(x - \xi)\, d\xi. \tag{1}$$

În teoria distribuțiilor operația analoagă joacă un rol și mai însemnat.

Definiția convoluției în cadrul teoriei distribuțiilor se bazează pe noțiunea de *produs direct* de distribuții. De aceea începem cu introducerea produselor directe (§5.1). În celelalte puncte ale paragrafului de față se va introduce și studia convoluția cu exemple de aplicare a ei.

5.1. **Produsul direct de distribuții.** Fie dată distribuția $f(x)$ definită pe spațiul X_k al funcțiilor test de k variabile independente $x_1, \dots, x_k$, precum și distribuția $g(y)$ definită pe spațiul Y_m al funcțiilor test de m variabile independente $y_1, \dots, y_m$. Cu ajutorul acestor distribuții definim o distribuție $h(z)$ pe spațiul Z_n al funcțiilor test de $n = k + m$ variabile independente $z_1 = x_1, z_2 = x_2, \dots, z_k = x_k, z_{k+1} = y_1, z_{k+2} = y_2, \dots, z_n = y_m$. Vom proceda în modul următor. Vom nota funcția test $\varphi(z)$ prin $\varphi(x, y)$. Fixînd variabila x vom considera pe $\varphi(x, y)$ ca funcție numai de y. Evident ea este o funcție test din Y_m. Să aplicăm funcționala $g(y)$; drept rezultat obținem o anumită funcție $\psi(x)$. Această funcție este indefinit derivabilă în raport cu x_j, căci

$$\frac{\psi(x + \Delta x_j) - \psi(x)}{\Delta x_j} = \left(g(y), \frac{\varphi(x + \Delta x_j, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x_j} \right) \to \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} \right)$$

avînd în vedere că șirul $\dfrac{\varphi(x + \Delta x_j, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x_j}$ converge către $\dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j}$ în sensul convergenței spațiului Y_m și că funcționala $g(y)$ este continuă. Este de asemenea evident că funcția $\psi(x)$ este cu suport compact. Astfel, $\psi(x)$ este o funcție fundamentală în spațiul X_k și putem să-i aplicăm funcționala $f(x)$. Deci are sens expresia

$$(f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \tag{2}$$

care definește o anumită funcțională pe spațiul Z_n; din continuitatea funcționalelor $g(y)$ și $f(x)$ se poate deduce că această funcțională este continuă *. O vom nota $h(z) = f(x) \times g(y)$ și o vom numi *produsul direct al funcționalelor $f(x)$ și $g(y)$*.

* Fie șirul $\varphi_\nu(x, y)$ tinzînd către zero în spațiul Z_n; trebuie să arătăm că numerele $(f(x), (g(y), \varphi_\nu(x, y)))$ tind de asemenea către zero. Pentru aceasta este suficient de arătat că funcțiile $\psi_\nu(x) = (g(y), \varphi_\nu(x, y))$ sînt toate nule în afara unui aceluiași compact și converg uniform către zero împreună cu derivatele de orice ordin. Prima afirmație este evidentă, căci $\varphi_\nu(x, y)$ sînt nule în afara unui domeniu fixat în spațiul variabilelor $x_1, \dots, y_m$. Să presupunem că $\psi_\nu(x)$ nu converg uniform către zero. Aceasta înseamnă că pentru un anumit $\varepsilon > 0$, există un șir de puncte $x^{(1)}, \dots, x^{(\nu)}, \dots$ astfel încît $|\psi_\nu(x_\nu)| = |(g(y), \varphi_\nu(x_\nu, y))| \geqslant \varepsilon$.

Dar cum șirul $\varphi_\nu(x, y)$ converge uniform către zero împreună cu toate derivatele, rezultă că funcțiile $\varphi_\nu^*(y) = \varphi_\nu(x_\nu, y)$ converg către zero ca funcții test în Y_m. Din continuitatea funcționalei $g(y)$ ar trebui să rezulte

$$(g(y), \varphi_\nu^*(y)) = (g(y), \varphi_\nu(x_\nu, y)) \to 0,$$

în contradicție cu ipoteza noastră. Astfel $\psi_\nu(x)$ converge uniform către 0; analog se demonstrează și convergența uniformă a tuturor derivatelor.

Produsul direct are o expresie deosebit de simplă atunci cînd se aplică unei funcţii test $\varphi(x, y)$ de forma unui produs de funcţii test $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(y)$. În acest caz, conform definiţiei produsului direct

$$(3)\qquad (f(x) \times g(y),\ \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)) = (f(x), (g(y),\ \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)) =$$

$$= (f(x),\ \varphi_1(x)\,(g(y),\ \varphi_2(y))) = (f,\ \varphi_1)\,(g,\ \varphi_2).$$

Exemple. Produsul direct $\delta(x) \times \delta(y)$ este $\delta(x, y)$. Produsul direct $\delta(x) \times 1(y)$ este funcţionala ce operează după formula

$$(\delta(x) \times 1(y),\ \varphi(x, y)) = \int_Y \varphi(0, y)\,dy.$$

Produsul direct a două funcţionale $f(x)$ şi $g(y)$ este funcţionala regulată ce corespunde funcţiei $f(x)g(y)$.

Suportul produsului direct. Să reamintim că am numit (§1.4) suportul distribuţiei f, mulţimea acelor puncte care posedă proprietatea că în orice vecinătate a unui astfel de punct distribuţia f nu este nulă. Să presupunem că suporturile funcţionalelor f şi g sînt F, respectiv G; care este suportul lui $h = f \times g$? Răspunsul este următorul: *suportul H al funcţionalei h este produsul cartezian $F \times G$ al suporturilor lui f şi g*; altfel spus, mulţimea H constă exact din acele perechi (x, y) în care x aparţine lui F iar y lui G.

Într-adevăr, să considerăm punctul (x_0, y_0) în care una din coordonate — să zicem x_0 pentru a fixa ideile — nu aparţine suportului corespunzător. Aceasta înseamnă că funcţionala f se anulează pentru orice funcţie test $\varphi(x)$ ce se anulează identic în afara unei anumite vecinătăţi fixate U a punctului x_0. Să considerăm o funcţie test arbitrară $\varphi(x, y)$, diferită de zero doar pentru $x \in U$ şi să arătăm că $(f \times g,\ \varphi(x, y)) = 0$. Vom avea

$$(f \times g,\ \varphi(x, y)) = (f(y), (g(x),\ \varphi(x, y))) = (f(y),\ 0) = 0,$$

prin urmare funcţionala $f \times g$ se anulează în vecinătatea punctului (x_0, y_0).

Pe de altă parte, dacă x_0 şi y_0 aparţin mulţimilor F şi G, atunci pentru orice vecinătate a punctului (x_0, y_0) putem găsi, evident, o funcţie de forma $\varphi(x)\psi(y)$ care să se anuleze în afara acestei vecinătăţi pentru care funcţionala $f \times g$ să nu se anuleze. Astfel valabilitatea afirmaţiei noastre a fost stabilită.

Comutativitate şi asociativitate. Au loc formulele

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x) \\ f(x) \times (g(y) \times h(z)) = (f(x) \times g(y)) \times h(z). \end{cases}$$

Pentru demonstraţie, deoarece în ambii membrii ai acestor egalităţi figurează funcţionale continue, este suficient de a demonstra aceste egalităţi pentru o mulţime densă de funcţii test. Pentru a justifica prima egalitate, alegem o mulţime densă de funcţii de forma $\sum_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x)\ \psi_j(y)$, unde $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ sînt funcţii test în variabilele respective *. Vom avea în acest caz

$$(f(x) \times g(y),\ \sum \varphi_j(x)\psi_j(y)) = \sum (f(x) \times g(y),\ \varphi_j(x)\psi_j(y)) =$$

$$= \sum (f(x),\ \varphi_j(x))\ (g(y),\ \psi_j(y))$$

şi analog

$$(g(y) \times f(x),\ \sum \varphi_j(x)\psi_j(y)) = \sum (g(y),\ \psi_j(y))\ (f(x),\ \varphi_j(x))$$

Pentru a demonstra cea de-a doua egalitate, se face un calcul analog cu funcţii test de forma $\sum_j \varphi_j(x)\psi_j(y)\chi_j(z)$.

5.2. **Convoluţia distribuţiilor.** Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două funcţii absolut integrabile pe dreapta reală, iar $h(x) = f(x) * g(x)$ convoluţia lor, atunci expresia funcţionalei definită de funcţia (de asemenea absolut integrabilă) $h(x)$ se poate exprima în modul următor:

$$(h(x),\ \varphi(x)) = \int h(x)\varphi(x)\,dx = \int \left\{ \int\int f(\xi)g(x - \xi)\,d\xi \right\} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\int f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi + \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

* Mulţimea funcţiilor de acest tip este într-adevăr densă în spaţiul K. Dacă, de exemplu, funcţia $\varphi(x, y)$ se anulează în afara lui $Q = \{|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a\}$, atunci pentru $\varepsilon = 1/\nu$ dat, folosind teorema lui Weierstrass, construim polinomul $P_\nu(x, y)$ care în $Q' = \{|x| \leqslant 2a,\ |y| \leqslant 2a\}$ diferă de $\varphi(x, y)$ cu mai puţin de ε, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul ν. Fie apoi $b(x)$ o funcţie test fixată egală cu 1 pentru $|x| \leqslant a$ şi zero pentru $|x| \geqslant 2a$. Atunci pentru $\varepsilon \to 0$ funcţia $P_\nu(x, y)\ b(x)\ b(y)$ converge către funcţia $\varphi(x, y)$ în spaţiul K.

Cu alte cuvinte, rezultatul căutat este rezultatul aplicării funcționalei $f(x)g(y)$, pe care o putem considera produsul direct al distribuțiilor $f(x)$ și $g(y)$, funcției $\varphi(x+y)$.

De aceea este natural de a defini convoluția a două distribuții f și g cu ajutorul formulei

$$(1) \qquad (f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y)).$$

Dar acum trebuie să ținem seama că $\varphi(x+y)$ nu mai este o funcție cu suport compact în spațiul variabilelor x, y și ca atare, în general, formula (1) nu are sens. Dar în condiții suficient de generale, pe care le vom discuta acum, formula (1) are sens.

După cum am văzut în punctul precedent, suportul produsului direct al funcționalelor $f(x)$ și $g(y)$ este produsul cartezian al suporturilor acestor funcționale. Egalitatea (1) va avea sens dacă banda $|x+y| \leqslant a$ în care este inclus suportul funcției $\varphi(x+y)$ are intersecție compactă cu suportul produsului direct $f \times g$. În acest caz funcția $\varphi(x+y)$ se poate înlocui în banda $|x+y| \leqslant a$ cu o funcție cu suport compact $\varphi(x, y)$, lăsînd neschimbate valorile sale în punctele de intersecție ale benzii cu suportul funcționalei $f \times g$; dar atunci expresia

$$(f \times g, \varphi(x, y))$$

a fost definită mai înainte, și, după cum ușor se poate vedea, ea nu depinde de valorile funcției $\varphi(x, y)$ în afara intersecției sus amintite.

În particular egalitatea (1) are sens în următoarele cazuri:

a) *una dintre funcționalele f, g are suportul compact*;

b) *suporturile ambelor funcționale, f, g sînt mărginite de aceeași parte* (de pildă $f = 0$ pentru $x < a$, $g = 0$ pentru $y < b$).

Să considerăm mai întîi cazul a). Fie, de exemplu, $f(x)$ o distribuție cu suportul compact, iar $g(y)$ o distribuție oarecare. Atunci

$$(2) \qquad (f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y)) =$$

$$= (g(y), (f(x), \varphi(x+y))).$$

Funcția $(f(x), \varphi(x+y))$ este indefinit derivabilă și se anulează pentru $|y|$ suficient de mare, căci pentru $|y|$ suficient de mari suportul funcției $\varphi(x+y)$ și al funcționalei $f(x)$ nu se intersectează. Din acest motiv $(f(x), \varphi(x+y))$ este o funcție test în variabila y și putem să-i aplicăm funcționala $g(y)$.

Dacă, dimpotrivă $g(y)$ este cu suport compact, iar $f(x)$ arbitrar, atunci funcția $(f(x), \varphi(x+y))$ va fi indefinit derivabilă dar în general nu va avea suportul compact, dar funcționala $g(y)$ avînd suport compact, necompacitatea suportului lui $(f(x), \varphi(x+y))$ nu va juca nici un rol și (2) are sens.

Să considerăm acum cazul b): presupunem, pentru a fixa ideile că suporturile funcționalelor $f(x)$ și $g(y)$ sînt mărginite la stînga. Considerăm funcția $(f(x), \varphi(x+y))$. Ca mai înainte, aceasta este o funcție indefinit derivabilă în variabila y. Pentru valori pozitive suficient de mari ale lui y, suportul funcției $\varphi(x+y)$ nu va intersecta suportul funcționalei $f(x)$; deci, pentru acești y funcția $(f(x), \varphi(x+y))$ se va anula. Astfel funcția $(f(x), \varphi(x+y))$ va avea suportul mărginit la dreapta. Cum prin ipoteză suportul funcționalei $g(y)$ este mărginit la stînga, intersecția suporturilor respective va fi compactă și deci (2) are sens.

Astfel, *în cazurile* a) *și* b) *convoluția funcționalelor f, g are sens.* În particular, sînt definite întotdeauna convoluțiile $\delta * f$, $D\delta * f$, D fiind un operator diferențial arbitrar; aceasta rezultă din aceea că funcționalele δ, $D\delta$ sînt concentrate într-un singur punct.

Să calculăm $\delta * f$. În conformitate cu definițiile, avem:

$$(\delta * f, \varphi) = (\delta(x) \times f(y), \varphi(x+y)) = (f(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) =$$

$$= (f(y), \varphi(y)) = (f, \varphi).$$

Astfel, pentru orice funcțională f,

$$(3) \qquad \delta * f = f$$

Analog

$$(4) \qquad D\delta * f = Df.$$

Din proprietățile generale ale produsului direct al funcționalelor convoluția distribuțiilor este comutativă, cel puțin în cazurile a) și b):

$$f * g = g * f.$$

Se poate scrie analog egalitatea ce exprimă asociativitatea

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

presupunînd că suporturile a două dintre cele trei funcționale, f, g, h sînt compacte sau că suporturile tuturor celor 3 funcționale sînt mărginite toate de aceeași parte.

Să stabilim următoarea *formulă de derivare a convoluției*:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \tag{5}$$

În continuare această formulă va fi adesea folosită.

Avem:

$$(D(f * g), \varphi) = (f * g, D^*\varphi),$$

unde, de exemplu,

$$D^* = (-1)^\nu D,$$

dacă D este operator diferențial omogen de ordin ν. Apoi din definiția convoluției

$$(f * g, D^*\varphi) = (g(y), (f(x), D^*\varphi(x + y))) = (g(y), (Df(x), \varphi(x + y))) =$$
$$= (Df * g, \varphi),$$

de unde:

$$D(f * g) = Df * g.$$

Și deoarece convoluția este comutativă

$$D(f * g) = D(g * f) = Dg * f = f * Dg,$$

și astfel formula (5) a fost stabilită. Demonstrăm acum o lemă utilă privind continuitatea convoluției.

Lemă. Din $f_\nu \to f$ rezultă $f_\nu * g \to f * g$ în fiecare din următoarele ipoteze:

a) Toate funcționalele f_ν au suportul într-un același compact.

b) Funcționala g este cu suport compact.

c) Suporturile funcționalelor f_ν și g sînt mărginite de aceeași parte, această mărginire nedepinzînd de ν.

Demonstrație. Din definiția convoluției, pentru orice funcție test

$$(f_\nu * g, \varphi) = (f_\nu(y), (g(x), \varphi(x + y))). \tag{6}$$

În cazul a) funcția $(g(x), \varphi(x + y))$ se poate înlocui cu funcția test $\psi(x)$, identic nulă în afara domeniului pe care sînt concentrate toate funcționalele $f_\nu(y)$; deci,

$$(f_\nu * g, \varphi) = (f_\nu(y), \psi(y)) \to (f, \psi) = (f * g, \varphi),$$

adică

$$f_\nu * g \to f * g,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul b), $\psi(y) = (g(x), \varphi(x + y))$ este o funcție test, și prin urmare, ca mai înainte, obținem concluzia.

În cazul c), dacă, pentru a fixa ideile, presupunem că suporturile funcționalelor f_ν și g sînt mărginite la stînga, atunci funcția $\psi(y) = (g(x), \varphi(x + y))$ are suportul mărginit la dreapta; ea se poate deci înlocui cu o funcție test, nulă în afara domeniului în care sînt concentrate toate funcționalele $f_\nu(y)$, de aici încolo demonstrația se încheie ca mai înainte. Lema este dovedită.

Consecință. Dacă funcționala $f = f_t$ depinde de parametrul t și există derivata $\frac{\partial}{\partial t} f_t$* atunci avem

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t * g) = \frac{\partial f_t}{\partial t} * g$$

în fiecare din următoarele trei cazuri.

a) Funcționalele f_t au suportul conținut în același compact.

b) Funcționala g are suportul compact.

c) Suporturile funcționalelor f_t și g sînt mărginite de aceeași parte și această mărginire nu depinde de t.

Demonstrația se reduce ușor la demonstrarea lemei dacă ținem seama că derivata $\frac{\partial}{\partial t} f$ este limita rapoartelor

$$\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t},$$

pentru $\Delta t \to 0$.

5.3. **Potențialul newtonian și soluțiile fundamentale ale ecuațiilor diferențiale.** Formula clasică a potențialului newtonian al unei distribuții de mase de densitate $\mu(x_1, x_2, x_3)$ cu suport compact, regulată pe porțiuni este:

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi\, d\xi_2\, d\xi_3}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}. \tag{1}$$

Se știe că $u(x_1, x_2, x_3)$ este o funcție avînd derivate pînă la ordinul doi și că verifică ecuația lui Poisson

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = \mu(x_1, x_2, x_3).$$

* Despre derivarea în raport cu un parametru vom discuta mai amănunțit în anexa 4.

Formula (1) se poate scrie sub forma unei convoluții

$$u = \mu * \left(-\frac{1}{4r}\right) \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Aici μ poate fi orice distribuție cu suport compact. În cazul general u este o distribuție. Dar și în acest caz general formula lui Poisson rămîne adevărată; într-adevăr ținînd seama de faptul că $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$ (v. §2.3) putem scrie

$$\Delta u = \Delta\left(\mu * \left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right) = \mu * \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \mu * \delta = \mu.$$

Fie acum

$$P(D)u = \mu \tag{2}$$

o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, arbitrară și avînd în membrul drept o distribuție μ. Vom numi *soluție fundamentală* a ecuației diferențiale (2), funcționala $E(x)$ care verifică ecuația

$$P(D)E = \delta$$

(această funcțională este definită cu aproximația unei soluții a ecuației omogene). Atunci cînd se cunoaște o soluție fundamentală E, soluția ecuației (2) se poate scrie sub forma unei convoluții

$$u = \mu * E,$$

dacă — de pildă — μ este o distribuție cu suport compact. Într-adevăr

$$P(D)u = \mu * P(D)E = \mu * \delta = \mu.$$

Astfel, pentru operatorul lui Laplace în spațiul cu 3 dimensiuni vom avea ca soluție fundamentală funcționala regulată $E = -\frac{1}{4\pi r}$. În spațiul n-dimensional soluția fundamentală pentru operatorul lui Laplace pentru $n > 2$ este funcționala regulată $-\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{r^{n-2}}$,

unde Ω_n este aria sferei unitate, iar pentru $n = 2$, funcționala regulată $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

Drept exemplu să calculăm soluția fundamentală a unei ecuații diferențiale cu coeficienți constanți *.

$$a_0E^{(n)} + a_1E^{(n-1)} + \ldots + a_nE = \delta(x). \tag{3}$$

Fie $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene

$$a_0u^{(n)}(x) + a_1u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_nu(x) = 0. \tag{4}$$

Vom pune

$$E(x) = \begin{cases} A(x) \equiv \alpha_1u_1(x) + \ldots + \alpha_nu_n(x) \text{ pentru } x < 0, \\ B(x) \equiv \beta_1u_1(x) + \ldots + \beta_nu_n(x) \text{ pentru } x > 0 \end{cases}$$

alegînd constantele α_i și β_j astfel încît să fie verificată ecuația (3). Pentru că $\delta(x)$ este derivata funcției $\theta(x)$, egale cu 1 pentru $x > 0$ și 0 pentru $x < 0$, este suficient de a cere ca în punctul $x = 0$ să fie îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} A(0) = B(0),\ A'(0) = B'(0), \ldots, A^{(n-2)}(0) = B^{(n-2)}(0), \\ a_0[A^{(n-1)}(0) - B^{(n-1)}(0)] = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Notînd $\alpha_i - \beta_i = \gamma_i (i = 1, \ldots, n)$ obținem pentru numerele γ_i sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \gamma_1u_1(0) + \ldots + \gamma_nu_n(0) = 0, \\ \gamma_1u_1'(0) + \ldots + \gamma_nu_n'(0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_1u^{(n-2)}(0) + \ldots + \gamma_nu_n^{(n+1)}(0) = 0, \\ \gamma_1u_1^{(n-1)}(0) + \ldots + \gamma_nu_n^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}. \end{cases} \tag{6}$$

Acest sistem are întotdeauna soluții căci determinantul său este wronskianul sistemului fundamental de soluții $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ și, prin urmare, nu se anulează în nici un punct.

* Se utilizează în fapt doar existența unui sistem fundamental de soluții care există și în cazul coeficienților variabili, atît timp cît coeficientul a_0 nu se anulează.

Vedem astfel că soluția fundamentală se definește cu un mare grad de arbitrar, unic definite fiind doar diferențele γ_i. Această libertate se explică ușor : soluția fundamentală este definită cu aproximația unei soluții arbitrare a ecuației (4). Ea se folosește de asemenea pentru construcția funcției Green — o soluție fundamentală ce verifică diferite condiții la limită *.

Exemplu : Să considerăm ecuația

$$E'' = \delta(x). \tag{7}$$

Putem alege în acest caz $u_1 = 1$, $u_2 = x$ și, prin urmare,

$$A(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad B(x) = \beta_1 + \beta_2 x.$$

Pentru $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ obținem

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1.$$

Deci

$$E = \beta_1 + \beta_2 x + x_+.$$

ceea ce, bineînțeles se vede direct din ecuația (7). În §6 ca și în §2 al capitolului 3 vom determina soluțiile fundamentale ale unei clase de ecuații cu derivate parțiale.

5.4. Integrala Poisson și soluția fundamentală a problemei Cauchy. Formula clasică a lui Poisson în teoria propagării căldurii este :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \mu(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

unde $\mu(\xi)$ este de pildă, o funcție integrabilă cu suport compact. Se știe ** că $u(x, t)$ este derivabilă în raport cu t, are derivate de ordinul 2 în raport cu x și verifică ecuația căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

* V. de exemplu M. A. Naimark, *Operatori diferențiali liniari* (în l. rusă).

** V. V. I. Smirnov. *Curs*, t. II, pct. 204, pag. 647.

cu condiția inițială

$$u(x, 0) = \mu(x). \tag{3}$$

Funcția $u(x, t)$ reprezintă temperatura în momentul t și în punctul x a unei bare infinite atunci cînd se cunoaște temperatura inițială $\mu(x)$ pentru $t = 0$. Formula (1) se poate scrie ca o convoluție

$$u(x, t) = \mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \tag{4}$$

Aici, putem lua drept μ orice distribuție cu suport compact. De aceea în cazul general, funcția $u(x, t)$, definită de formula (4) este, bineînțeles, o distribuție (depinzînd de parametrul t). Vom arăta că *această distribuție verifică ecuația propagării căldurii cu condiția inițială* (3).

Mai întîi remarcăm că, pentru $t > 0$, derivînd funcția

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

considerată ca distribuție, în raport cu x și în raport cu parametrul t, obținem același rezultat ca atunci cînd derivăm uzual în raport cu x și t. Din consecința lemei privind continuitatea convoluției (§ 5.2), rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu(x) * v(x, t)) = \mu(x) * \frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$$

și din formula de derivare a convoluției (§5.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu * v) = \mu * \frac{\partial^2}{\partial x^2} v.$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\mu * v) = \mu * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v.$$

Dar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \equiv 0,$$

și deci $\mu * v$ este într-adevăr o soluție a ecuației căldurii.

Pe de altă parte, pentru că $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$ are drept limită în sensul teoriei distribuțiilor pentru $t \to 0$, pe $\delta(x)$ (v. §2.5, ex. 2), avem pentru $t \to 0$, ținînd seama de lema privind continuitatea convoluției (§5.2),

$$u(x, t) = \mu * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \mu * \delta = \mu.$$

Fie acum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u,$$

o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți. Să considerăm problema Cauchy: a găsi o soluție a acestei ecuații (o distribuție, depinzînd de t ca parametru), ce se reduce pentru $t = 0$ la distribuția dată $u_0(x)$. Soluția particulară ce se reduce pentru $t = 0$ la $\delta(x)$, se numește *soluția fundamentală* a acestei probleme, și va fi notată $E(x, t)$. Pentru ecuația căldurii ea este funcția $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$.

Dacă se cunoaște soluția fundamentală, atunci soluția problemei Cauchy cu data inițială $u_0(x)$ — în ipoteza că funcționala $u_0(x)$ este cu suport compact — se poate exprima ca o convoluție

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x).$$

Într-adevăr, avem pe de o parte, pentru $t > 0$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[E(x,t) * u_0(x)] - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[E(x, t) * u_0(x)] =$$

$$= \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} * u_0(x) - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) * u_0(x) =$$

$$= \left[\frac{\partial E}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E\right] * u_0(x) = 0 * u_0(x) = 0,$$

iar pe de altă parte

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = [\lim_{t \to 0} E(x, t) * u_0(x)] = \delta(x) * u_0(x) = u_0(x),$$

tocmai ceea ce se afirmase.

Se poate considera și cazul mai general al ecuației liniare

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \tag{5}$$

de ordin oarecare, să zicem m, în t, de asemenea cu coeficienți constanți. În acest caz problema Cauchy constă în a găsi o soluție a ecuației (5) verificînd condițiile inițiale,

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_0(x), \ldots, \frac{\partial_u^{m-1}(x, 0)}{\partial t} = u_{m-1}(x). \tag{6}$$

Soluția fundamentală a ecuației (5) se numește soluția $E(x, t)$, verificînd condițiile inițiale

$$\begin{cases} E(x, 0) = 0, \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} E(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \\ \\ \frac{\partial^{(m-1)} E(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = \delta(x). \end{cases} \tag{7}$$

Dacă distribuția $u_{m-1}(x)$ este cu suport compact, atunci soluția problemei Cauchy (5) cu datele inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \\ \\ \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(0) \end{cases} \tag{8}$$

se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = E(x, t) * u_{m-1}(x). \tag{9}$$

Această formulă este valabilă pentru orice $u_{m-1}(x)$, dacă soluția fundamentală este cu suport compact. Într-adevăr, funcția $u(x, t)$ este pe de o parte soluție a ecuației (5), pentru că operatorul diferențial $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ se poate aplica lui $E(x, t)$; apoi, pentru $t \to 0$

avem:

$$u(x, t) \to E(x, 0) * u_{m-1}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \to \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} * u_{m-1}(x) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial t^{m-1}} \to \frac{\partial^{m-1} E(x, 0)}{\partial t^{m-1}} * u_{m-1}(x) = u_{m-1}(x).$$

Exemplu. Să considerăm ecuația coardei,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{10}$$

și să arătăm că soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru această ecuație este funcția

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < t, \\ 0, & |x| > t. \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru $t > 0$ fixat, avem:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\delta(x + t) - \frac{1}{2}\,\delta(x - t),$$

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\,\delta'(x + t) - \frac{1}{2}\,\delta'(x - t),$$

iar pentru x fixat, derivînd pe $E(x, t)$ în raport cu parametrul t, găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\delta(x + t) + \frac{1}{2}\,\delta(x - t), \\ \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\,\delta'(x + t) - \frac{1}{2}\,\delta'(x - t), \end{cases} \tag{11}$$

și deci ecuația (10) este verificată.

Apoi, făcînd pe $t \to 0$ în formula (11), obținem:

$$\left.\frac{\partial E(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x),$$

deci și condiția inițială prin care se definește soluția fundamentală a problemei Cauchy este îndeplinită (este evident că $E(x, t)$ pentru $t \to 0$ are limita 0).

Deducem de aici forma soluției problemei Cauchy pentru ecuația coardei (10) cu condițiile inițiale,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x).$$

Conform formulei (9) avem (presupunînd $u_1(x)$ local integrabilă),

$$u(x, t) = E(x, t) * u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi, t)\, u_1(x - \xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} u_1(x - \xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\eta)\, d\eta.$$

În cazul de față soluția fundamentală este cu suport compact deci convoluția $E(x, t) * u_1(x)$ există pentru orice distribuție $u_1(x)$

Putem trece acum la cazul mai general în care datele inițiale

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

sînt toate cu suport compact (se poate renunța la această condiție dacă soluția fundamentală $E(x, t)$ este cu suport compact). Să remarcăm că dacă u este o soluție a ecuației, verificînd condițiile inițiale

$$\frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 2),$$

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-2}(x),$$

atunci $u_1(x, t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ verifică aceeaşi ecuaţie cu condiţii iniţiale dintre care nu sînt nule doar $\dfrac{\partial^{m-2} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-2}}$ şi $\dfrac{\partial^{m-1} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$. Scăzînd din $u_1(x, t)$ soluţia $u_2(x, t)$, verificînd condiţiile

$$\frac{\partial^k u_2(x, 0)}{\partial t^k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2),$$

$$\frac{\partial^{m-1} u_2(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-1}},$$

obţinem o soluţie u_3 pentru care, atunci cînd $t = 0$, doar derivata $\dfrac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}$ este nenulă, ea fiind egală cu funcţia dată $u_{m-2}(x)$. Analog, pentru orice $k \leqslant m-1$ se poate obţine o soluţie cu proprietatea că pentru $t = 0$ dintre primele $(m-1)$ derivate în raport cu t este diferită de zero doar derivata $\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}$, care este egală cu $u_k(x)$. Suma acestor soluţii particulare dă soluţia problemei generale.

Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia corzii (10) cu date iniţiale generale

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \tag{12}$$

se obţine prin aceasta metodă în modul următor. Găsim soluţia $u_1(x, t)$, ce corespunde datelor iniţiale

$$u_1(x, 0) = 0, \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = u_0(x).$$

Din cele arătate, ea este de forma

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Derivînd pe $u_1(x, t)$ în raport cu t, găsim o nouă soluţie

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = u_2(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)],$$

verificînd condiţiile iniţiale

$$u_2(x, 0) = \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x)}{\partial t} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial t}\right] = 0.$$

Se vede de aici că soluţia corespunzătoare datelor iniţiale (12), este funcţia

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi.$$

Am obţinut astfel celebra formulă a lui d'Alembert.

Vom găsi în continuare (v. §6) prin metode analoage soluţii fundamentale ale problemei Cauchy pentru o clasă vastă de ecuaţii cu derivate parţiale.

5.5. **Integrare şi derivare de ordin oarecare.** Este bine cunoscută formula lui Cauchy

$$g_n(x) = \int_0^x \int_0^{\xi_{n-1}} \cdots \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_1} g(\xi)\, d\xi\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi,$$

care reduce calculul n-ori iterat al primitivei funcţiei $g(x)$, definite pentru $x > 0$, la calculul unei integrale simple. Această formulă se poate scrie şi sub forma

$$g_n(x) = g(x) * \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g(x) * \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

unde funcţiile $g(x)$ şi x^{n-1} se consideră nule pentru $x < 0$.

Este natural să generalizăm această formulă la cazul oricărui exponent λ și oricărei distribuții g, cu suportul situat pe semiaxa $x > 0$, definind primitiva de ordin λ ca fiind convoluția

$$g_\lambda(x) = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

Această formulă are sens pentru $Re\lambda > 0$. Pentru celelalte valori ale lui λ, $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ trebuie înțeleasă ca distribuția introdusă în §3.5; cum aceasta este concentrată pe semidreapta $x > 0$, convoluția este bine definită. Este comod de a nota $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \Phi_\lambda$, astfel încît

$$g_\lambda(x) = g(x) * \Phi_\lambda. \tag{2}$$

Din egalitatea

$$\Phi_{-k} = \delta^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(§3.5) deducem că

$$g_0(x) = g(x) * \Phi_0 = g(x) * \delta(x) = g(x),$$

$$g_1(x) = g(x) * \Phi_{-1} = g(x) * \delta'(x) = g'(x)$$

ș.a.m.d.; astfel formula (2) dă nu numai primitivele iterate, dar și toate derivatele funcției $g(x)$. Aceasta ne face a numi convoluția

$$g_{-\lambda} = g * \Phi_{-\lambda},$$

derivata de ordin λ a distribuției g și o notăm astfel

$$g_{-\lambda} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} g.$$

Pentru funcționalele Φ_λ are loc formula

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \Phi_{\lambda+\mu}, \tag{3}$$

sau

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}. \tag{3'}$$

Să demonstrăm pentru început că ea este adevărată pentru $Re\lambda > 0$, $Re\,\mu > 0$. Cum

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \int_0^x \frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} d\xi,$$

$$\Phi_{\lambda+\mu} = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)},$$

trebuie demonstrată doar relația

$$\int_0^x \xi^{\lambda-1}(x-\xi)^{\mu-1}\, d\xi = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} x^{\lambda+\mu-1}.$$

Facem în membrul stîng substituția $\xi = xt$; atunci integrala din membrul stîng se reduce la integrala

$$x^{\lambda+\mu-1}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\, dt$$

și relația căutată este consecința următoarei formule cunoscute

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{(\lambda+\mu)}.$$

Pentru celelalte valori ale lui λ și μ, formula (3) va rămîne valabilă în virtutea unicității prelungirii analitice.

Din formulele (3) rezultă că pentru orice distribuție g (concentrată pe semiaxa $x \geqslant 0$), avem

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu}. \tag{4}$$

Pentru $\mu = -\lambda$ se vede că derivarea și integrarea de același ordin sînt operatorii inverse. Apoi, din formulele (4) se vede că,

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma g}{dx^\gamma}\right) = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}},$$

pentru orice β, γ.

Să mai remarcăm o consecință a formulei (3). Schimbînd pe λ în $-\lambda$, putem scrie

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right)=\frac{x_+^{\mu-\lambda-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)}. \tag{6}$$

În particular, pentru $\mu=1$, avem

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,\theta(x)=\frac{x_+^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}. \tag{6'}$$

Dacă în formula (6) μ este un număr întreg negativ sau nul, $\mu=-k$, obținem că

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\delta^{(k)}(x)\right)=\frac{x_+^{-k-\lambda-1}}{\Gamma(-k-\lambda)}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, dacă $\mu-\lambda=-k$ este un întreg pozitiv sau nul, din (6) rezultă că,

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\lambda-k-1}}{\Gamma(\lambda-k)}\right)=\delta^{(k)}(x). \tag{8}$$

Exemple. 1. Fie așa-numita ecuație integrală a lui Abel,

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\alpha}. \tag{9}$$

Aici g este funcția dată, f cea căutată.

În teoria clasică *) se presupune α mai mic decît 1; această condiție asigură convergența integralei din membrul drept. Dar noi nu avem nevoie de această ipoteză, căci pentru orice α putem considera membrul drept al ecuației (9) ca integrala de ordin $\lambda=-\alpha+1$ a distribuției f, adică drept convoluția

$$g(x)=f(x)*\Phi_\lambda. \tag{9'}$$

Pentru a obține pe f din g este evident necesar de a aplica acesteia din urmă o derivare de ordin λ, și astfel $f(x)=\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}g(x)$. Soluția se

*) v. G. M. Fichtengolt, *Curs*, t. III, pct. 617, pag. 215 (cazul $\alpha=1/2$).

obține făcînd produsul de convoluție cu funcționala Φ_λ:

$$\begin{aligned} g(x)*\Phi_{-\lambda}&=(f(x)*\Phi_\lambda)*\Phi_{-\lambda}=\\ &=f(x)*(\Phi_\lambda*\Phi_{-\lambda})=f(x)*\delta=f(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Fie, în particular $0<\alpha<1$; atunci Φ_λ se reduce la funcția $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x_+^{-\alpha}$ și ecuația (9') capătă forma (9). În acest caz, $-\lambda=\alpha-1$ și funcționala $\Phi_{-\lambda}$ este singulară, astfel încît, în general, soluția ecuației (9) nu se reduce la formula clasică. Dacă se presupune în plus că funcția $g(x)$ este diferențiabilă, atunci se poate scrie soluția sub forma clasică. Anume, avem

$$g(x)*\Phi_{\alpha-1}=g(x)*\frac{d}{dx}\Phi_\alpha=\frac{d}{dx}g(x)*\Phi_\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}}d\xi,$$

adică

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{g'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}. \tag{11}$$

Formula (11) pentru $\alpha=\frac{1}{2}$ a fost de fapt obținută de Abel.

2. Numeroase funcții speciale se pot exprima ca derivate de ordin fracționar ale funcțiilor elementare. Pentru funcția hipergeometrică *) există două astfel de reprezentări. Funcția hipergeometrică $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ este definită pentru $Re\,\gamma>Re\,\beta>0$ și $|x|<1$ ca integrala,

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^x t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt. \tag{12}$$

Pentru celelalte valori ale lui β,γ ($\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$) și $|x|<1$ ea este definită prin prelungire analitică, adică (v. §3.8) ca regularizata acestei integrale. Să efectuăm în această integrală substituția $w=tx$.

*) v. G. M. Fichtengolt, *Curs*, t. II, pct. 441 pag. 439.

Obținem:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}} \int_0^x w^{\beta-1}(1-w)^{-\alpha}(x-w)^{\gamma-\beta-1}\,dw. \tag{13}$$

Această formulă se poate scrie sub forma,

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}} \left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)} \right). \tag{14}$$

Astfel, funcția $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ este derivata de ordin $\beta - \gamma$ a funcției $\frac{x^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}$. Aceasta se poate scrie și astfel

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{x_+^{\gamma-\beta-1}}{\Gamma(\gamma-\beta)} * \frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}. \tag{15}$$

Altă expresie a funcției hipergeometrice sub forma unei derivate fracționare se obține dacă în integrala (12) se face substituția $w = \frac{x(1-t)}{1-tx}$. Obținem în acest caz

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}} \int_0^x w^{\gamma-\beta-1}(1-w)^{\alpha-\gamma}(x-w)^{\beta-1}\,dw. \tag{16}$$

Cu alte cuvinte

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}} \left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)} \right]. \tag{17}$$

Comparînd formulele (14) și (17), obținem formula celebră,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x). \tag{18}$$

O relație frumoasă relativ la funcția hipergeometrică se deduce din egalitatea (5), adică din

$$\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}} \left[\frac{d^{\gamma} g}{dx^{\gamma}} \right] = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}}. \tag{19}$$

Să efectuăm derivarea de ordin $-\delta$ în egalitatea (14). Obținem:

$$\frac{d^{-\delta}}{dx^{-\delta}} \left[\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) \right] = \frac{d^{\beta-\gamma-\delta}}{dx^{\beta-\gamma-\delta}} \left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)} \right] = \tag{20}$$

$$= \frac{x^{\gamma+\delta-1}}{\Gamma(\gamma+\delta)} F(\alpha, \beta, \gamma+\delta; x).$$

Punînd această egalitate sub formă integrală, obținem:

$$F(\alpha, \beta, \gamma+\delta; x) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)x^{\gamma+\delta-1}} \int_0^x w^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma; x)(x-w)^{\delta-1}\,dw =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)} \int_0^1 w^{\gamma-1}(1-w)^{\delta-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xw)\,dw. \tag{21}$$

Această fomulă este adevărată pentru toți α, β, γ, δ, dacă integrala din membrul drept este considerată ca regularizata integralei respective (v. §. 3. 8).

Reprezentările (14) și (17) ale funcției hipergeometrice sub forma unor derivate fracționare, permit de a stabili cazurile în care această funcție este un polinom, sau un polinom înmulțit cu $(1-x)^p$.

Fie β un întreg negativ sau nul, $\beta = -k$. Atunci $\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \delta^{(k)}(x)$. Prin urmare formula (14) capătă forma,

$$\frac{x^{\gamma-1} F(\alpha, -k, \gamma, x)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{d^{-k-\gamma}}{dx^{-k-\gamma}} [(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)]. \tag{22}$$

Dar $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ *) este o combinație liniară de δ și de derivatele sale:

$$(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \delta^{(k-r)}(x). \tag{23}$$

*) Este evident că un astfel de produs are sens, căci $\delta^{(k)}(x)$ are suportul redus la 0 iar $(1-x)^{-\alpha}$ poate fi înlocuită cu o funcție indefinit derivabilă, egală cu $(1-x)^{-\alpha}$ în vecinătatea originii.

În conformitate cu formula (7),

$$\frac{\mathrm{d}^{-k-\gamma}}{\mathrm{d}x^{-k-\gamma}}[\delta^{(k-r)}(x)] = \frac{x^{r+\gamma-1}}{\Gamma(r+\gamma)}.$$

Introducînd această expresie a lui $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ în formula (22), efectuînd derivarea şi simplificînd cu $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$ obţinem:

$$F(\alpha, -k, \gamma; x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+r)} x^r \tag{24}$$

(aici γ nu trebuie să fie un întreg negativ sau zero). Polinomul $F(\alpha, -n, \gamma; x)$ se numeşte *polinomul lui Jacobi* şi se notează $G(\alpha, -n, \gamma; x)$. Rezultă din formulele (18) şi (24), că, atunci cînd $\gamma - \beta$ este un întreg negativ, sau zero, $\gamma - \beta = -n$, funcţia hipergeometrică capătă forma

$$F(\alpha, \gamma+n, \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha-n} G(\gamma-\alpha, -n, \gamma; x).$$

Din egalitatea $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\beta, \alpha, \gamma; x)$ rezultă o afirmaţie analoagă, în cazul în care α sau $\gamma - \alpha$ sînt întregi negativi sau zero.

Să considerăm acum funcţia hipergeometrică ca funcţie de γ. Se vede din egalitatea (14) că această funcţie are singularităţi dacă γ este un întreg negativ sau zero. Funcţia $\Gamma(\gamma)$ are pentru $\gamma = -n$ un pol de reziduu $\frac{(-1)^n}{n!}$. Dacă α sau β sînt de asemenea întregi negativi sau zero, de pildă $\beta = -m$, cu $m < n$, atunci din cele spuse mai înainte, funcţia hipergeometrică este un polinom. Dacă această condiţie nu este verificată, funcţia hipergeometrică considerată ca funcţie de γ are un pol avînd reziduul

$$\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} \frac{\mathrm{d}^{\beta+n}}{\mathrm{d}x^{\beta+n}} \left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)} \right) = \tag{25}$$

$$= \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}\Gamma(\alpha, \beta, 1; \lambda)}{\mathrm{d}x^{n+1}}.$$

Să considerăm acum funcţiile Bessel *) şi să arătăm că funcţia $u^{p/2} \cdot J_p(\sqrt{u})$ se poate de asemenea reprezenta ca o derivată de ordin

*) v. V. I. Smirnov, *Curs*, vol. III, partea 2-a, cap. VI, § 2.

fracţionar de funcţii elementare. Funcţia $J_p(z)$ are pentru $Re\ p > -\frac{1}{2}$ următoarea reprezentare integrală:

$$J_p(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos zt\, \mathrm{d}t. \tag{26}$$

Pentru ceilalţi p, această integrală trebuie considerată ca o regularizată. Făcînd $zt = w$, obţinem:

$$J_p(z) = \frac{2}{(2z)^p \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^z (z^2-w^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos w\, \mathrm{d}w, \tag{27}$$

sau

$$2^p \sqrt{\pi} u^{p/1} J_p(\sqrt{u}) = \int_0^u \frac{(u-v)^{1-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{\cos\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\, \mathrm{d}v. \tag{28}$$

Această egalitate se mai poate scrie:

$$2^p \sqrt{\pi}\, u^{p/2} J_p(\sqrt{u}) = \frac{\mathrm{d}^{-p-1/2}}{\mathrm{d}u^{-p-1/2}} \left[\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \right]. \tag{29}$$

Să luăm acum derivata de ordin $(-q-1)$ a ambilor membri ai acestei egalităţi,

$$\frac{\mathrm{d}^{-q-1}}{\mathrm{d}u^{-q-1}} [2^p \sqrt{\pi}\, u^{p/2} J_p(\sqrt{u})] = \frac{\mathrm{d}^{-p-q-3/2}}{\mathrm{d}u^{-p-q-3/2}} \left(\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \right) = \tag{30}$$

$$= 2^{p+q+1} \sqrt{\pi} u^{\frac{p+q+1}{2}} J_{p+q+1}(\sqrt{u}).$$

Scriind aceste egalităţi sub formă integrală, găsim:

$$2^{q+1} u^{\frac{p+q+1}{2}} J_{p+q+1}(\sqrt{u}) = \int_0^u v^{p/2} J_p(\sqrt{v})\, \frac{(u-v)^q}{\Gamma(q+1)} \mathrm{d}v. \tag{31}$$

Substituțiile $u = x^2$, $v = x^2 \sin\theta$ transformă formula (31) în

$$(32)\qquad J_{p+q+1}(x) = \frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)2^q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_p(x\sin\theta)\sin^{p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\,d\theta.$$

Această integrală se numește *integrala lui Sonin*, căci N. Ia. Sonin a demonstrat formula (32) pentru p și q întregi, $p>0$, $q>0$.

§ 6. Soluții fundamentale ale ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți

6.1. **Soluții fundamentale ale ecuațiilor eliptice.** Fie dat un operator diferențial liniar de ordin $2m$, $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ cu coeficienți constanți. Să notăm cu L_0 partea sa principală, adică partea ce conține numai termenii de ordin $2m$. Operatorul L se numește *eliptic* dacă atunci cînd înlocuim în L_0, $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ cu $\omega_1,\ldots,\omega_n$, obținem un polinom $L_0(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ ce nu se anulează pentru $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \neq 0$.

Trebuie să rezolvăm ecuația

$$(1)\qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1,\ldots,x_n) = \delta(x_1,\ldots,x_n).$$

Urmăm pentru aceasta următoarea metodă:

1°. Înlocuim distribuția δ din membrul drept cu funcția $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ care, pentru $\lambda=-n$, este egală cu δ (v. § 3.9, (9)).

2°. Descompunem pe $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ în unde plane, adică o reprezentăm conform formulei (4), § 3.10, ca media sa după toate direcțiile $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, a funcțiilor de forma $C|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda$ și rezolvăm ecuația pentru membrii drepți de forma $|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda$, ceea ce este deja elementar.

Astfel, înlocuim ecuația (1) prin

$$(2)\qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},$$

din care ecuația (1) se obține pentru $\lambda=-n$.

Reprezentăm acum membrul drept cu ajutorul formulei (4) din § 3.10.

$$(3)\qquad \frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_\Omega|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda\,d\Omega.$$

Dacă căutăm o soluție v a ecuației

$$(4)\qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)v = \frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)},$$

depinzînd doar de $\xi=\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n$, atunci soluția ecuației (2) se scrie sub forma

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\int_\Omega v(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\Omega.$$

Rezolvarea ecuației (4) se reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale ordinare. Funcția $v(\xi)$ fiind egală cu $v(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$ vom avea $\frac{\partial}{\partial x_k}=\omega_k\frac{d}{d\xi}$, și introducînd $v(\xi)$ în ecuația (4) obținem ecuația diferențială ordinară de ordin $2m$:

$$(5)\qquad L\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)v = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}.$$

Cel de al doilea membru al acestei ecuații în afară de ξ, depinde și de λ, iar coeficienții primului membru depind de $\omega_1,\ldots,\omega_n$. Prin urmare, soluția v depinde de ξ, λ, și ω și vom scrie $v=v_\omega(\xi,\lambda)$.

Fie $G(\xi, \omega)$ soluția fundamentală a ecuației (5), adică soluția ecuației

$$L\left(\omega_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \omega_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) G(\xi, \omega) = \delta(\xi).$$

Dar, atunci

$$v_\omega(\xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \eta, \omega) |\eta|^\lambda \, \mathrm{d}\eta \tag{6}$$

și

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int_\Omega v_\omega(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, \lambda) \, \mathrm{d}\Omega. \tag{7}$$

Pentru a obține soluția fundamentală căutată, trebuie să facem în formulele precedente $\lambda = -n$.

Un rezultat deosebit de simplu se obține în cazul unui număr impar de variabile. În acest caz,

$$\left.\frac{|\eta|}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = C\delta^{(n-1)}(\eta)$$

și deci

$$v_\Omega(\xi, -n) = C \frac{\partial^{n-1} G(\xi, \omega)}{\partial \xi^{n-1}}. \tag{8}$$

Prin urmare, în cazul unui număr impar de variabile soluția fundamentală a ecuației eliptice (1) se poate reprezenta sub forma

$$u(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \int_\Omega \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} G(\xi, \omega) \, \mathrm{d}\Omega. \tag{9}$$

Aici $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$, iar $G(\xi, \omega)$ este soluția fundamentală a ecuației diferențiale ordinare $L\left(\omega_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \omega_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)$. Se poate arăta că

$$C_1 = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\Omega_n (2\pi)^{(n-1)/2} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (n-2)}.$$

Riguros vorbind, existența convoluției în formula (6) și posibilitatea integrării în formula (7) trebuie demonstrate. Prima cale pentru aceasta ar fi obținerea unei formule explicite pentru $G(\xi, \omega)$. În loc de aceasta, lăsînd deoparte problema existenței convoluției (6), dăm un mod de calcul al funcției $v_\omega(\Sigma \omega_i x_i)$, care nu va lăsa nici un dubiu asupra posibilității integrării sale pe sfera unitate.

Să remarcăm că dacă distribuția $v(\xi)$ depinde continuu de anumiți parametri, atunci derivata sa de orice ordin în raport cu ξ depinde și ea continuu de acești parametri (v. § 2). Apoi, dacă distribuția $v(\xi)$ verifică ecuația $L_\xi v(\xi) = f(\xi)$ (L_ξ — operator diferențial cu coeficienți constanți), atunci derivata $w(\xi) = \frac{\mathrm{d}v(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$ este soluția ecuației $L_\xi w(\xi) = \frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$.

Să mai remarcăm că dacă distribuțiile $v_\lambda(\xi)$ și $f_\lambda(\xi)$ depind continuu de parametrul λ și pentru $\lambda \neq \lambda_0$ (în vecinătatea lui λ_0), $v_\lambda(\xi)$ este soluția ecuației $L_\xi v_\lambda(\xi) = f_\lambda(\xi)$, atunci și $v_{\lambda_0}(\xi)$ va fi soluția ecuației $L_\xi v_{\lambda_0}(\xi) = f_{\lambda_0}(\xi)$.

Să presupunem la început că $Re\lambda > 0$. Atunci membrul drept al ecuației (5) este o funcție continuă de ξ și soluția există în virtutea teoremelor clasice de existență. De asemenea, pentru $Re\lambda > 0$, membrul drept depinde continuu de λ, și deci v depinde continuu de λ. În sfîrșit, coeficienții ecuației (5), ce figurează în membrul stîng, depind continuu de $\omega(\Sigma\omega_i^2 = 1)$, și din cauza elipticității, modulul părții principale $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ are un minim pozitiv. În particular, v depinde continuu de ω și λ în sensul distribuțiilor.

Să remarcăm acum că a deriva de două ori în raport cu ξ membrul drept al ecuației (5) revine (cu aproximația factorului 2λ) la a micșora indicele cu doi, dacă $\lambda \neq 0$. Pe baza observațiilor precedente, putem deci găsi o soluție a ecuației (5), depinzînd continuu de ω, pentru orice λ, derivînd de mai multe ori soluția $v_\omega(\xi, \lambda)$ găsită pentru $Re\lambda > 0$, și, dacă este necesar, trecînd la limită.

În cazul n impar vom pleca de la $v_\omega(\xi, \lambda)$ cu $\lambda = 1$. După două derivări succesive vom obține, cu aproximația unui factor, funcția $G(\xi, \omega)$, pentru că membrul drept al ecuației (5) se reduce pentru $\lambda = -1$ la un multiplu al lui $\delta(\xi)$. Derivînd în continuare obținem formula (8).

În cazul n par, definim soluția $v_\omega(\xi, \lambda)$ pentru valori pozitive mici ale lui λ, o derivăm apoi de două ori în raport cu ξ, împărțim cu λ și facem pe λ să tindă la 0. Obținem astfel soluția ecuației (5) ce corespunde lui $\lambda = -2$. Derivînd în continuare obținem $v_\omega(\xi, \lambda)$ pentru $\lambda = -4, -6, \ldots$

Să examinăm mai amănunţit cazul unui operator diferenţial eliptic omogen $L(=L_0)$. Ecuaţia diferenţială ordinară (5) devine în acest caz

$$L(\omega_1, \ldots, \omega_n)v^{2m}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

şi deci,

$$v^{(2m)}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Pentru a găsi pe $v(\xi)$ este suficient să integrăm succesiv de $2m$ ori membrul drept al ecuaţiei obţinute. După cum am arătat în §3.4 rezultatul va fi:

$$v(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \left\{ \frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + Q_\lambda(\xi) \right\},$$

unde

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=2}^{m} \frac{\xi^{2m-2k}}{(2k-1)!(2m-2k)!(\lambda+2k)}.$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei eliptice omogene

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

este dată de formula

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_\Omega \left\{ \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + \right.$$

(10)

$$\left. + Q_\lambda(\Sigma \omega_k x_k) \right\} \frac{d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

În particular, pentru $\lambda = -n$ se obţine soluţia fundamentală a ecuaţiei eliptice omogene de ordin $2m$.

Să remarcăm că integrala pe sfera unitate Ω a fiecărui termen din expresia $Q_\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_n x_n\right)$ fiind un polinom de grad mai mic decît $2m$, şi care deci va verifica ecuaţia $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$, putem include în soluţia fundamentală doar acel termen necesar pentru a asigura absenţa unui pol pentru $\lambda = -n$ al funcţiei obţinute, dînd de o parte toţi ceilalţi termeni.

Să examinăm mai detaliat forma soluţiei fundamentale. Pentru aceasta vom cerceta separat cazul în care ordinul ecuaţiei nu este inferior dimensiunii spaţiului, adică $2m \geqslant n$ şi cazul în care $2m < n$. Să considerăm mai întîi cazul $2m \geqslant n$. Va trebui să distingem cazul n par şi n impar. Pentru n impar şi $2m \geqslant n$, trecerea la limită în (10) dă pentru soluţia fundamentală expresia

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^n (2m-n)!} \int_\Omega \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n}}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega.$$

(11)

Polinomul $Q_\lambda(\xi)$ a fost îndepărtat, căci el nu este necesar în trecerea la limită.

În cazul n par şi $2m \geqslant n$, spre a obţine pentru $\lambda = -n$ un rezultat finit, trebuie adăugat funcţiei $\frac{|\Sigma \omega_k x_k|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)}$ acel termen al polinomului $Q_\lambda(\Sigma \omega_n x_n)$, al cărui coeficient conţine factorul $\frac{1}{\lambda+n}$; anume $\frac{\xi^{2m-n}}{(n-1)!(2m-n)!(\lambda+n)}$. În acest mod, suma

$$\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + \frac{\xi^{-n+m}}{(n-1)!(2m-n)!(\lambda+n)}$$

tinde pentru $\lambda \to -n$ către $-\frac{\xi^{-n+2m} \ln|\xi|}{(n-1)!(2m-n)!}$, şi obţinem următoarea expresie pentru soluţia fundamentală:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (2m-n)!} \times$$

(12)

$$\times \int_\Omega \frac{(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{2m-n} \ln|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega.$$

Să remarcăm că, atunci cînd ordinul ecuației nu este inferior dimensiunii spațiului, integralele pe sferă converg și funcția Green este o funcție (și nu o distribuție) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, continuă în punctul $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Să trecem la cazul în care ordinul ecuației este inferior dimensiunii spațiului ($2m < n$). În acest caz:

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-2m-1)!}\,\delta^{(n-2m-1)}(x),$$

pentru n impar, și

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{|\xi|^{-n+2m}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

pentru n par.

Rezultă deci că soluția fundamentală are pentru n impar ($2m < n$) expresia

$$u(x_1, \ldots, x_n) =$$

(13)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Omega \delta^{(n-2m-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)\frac{d\Omega}{L(\omega_1, \ldots \omega_n)},$$

iar pentru n par ($2m < n$) forma

$$u(x_1, \ldots, x_n) =$$

(14)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{2(2\pi)^n} \int_\Omega |\,\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n\,|^{-n+2m} \frac{d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Se poate arăta că soluția fundamentală $u(x_1, \ldots, x_n)$, dată de formulele (11)–(14) este întotdeauna o funcție și posedă proprietățile următoare: pentru $x \neq 0$ ea este analitică, iar în vecinătatea originii verifică evaluările

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} O(r^{2m-n}), \text{ dacă } n \text{ este impar sau } n \text{ par și } m < n \\ O(r^{2m-n} \ln r), \text{ dacă } n \text{ este par și } m > n, \end{cases}$$

unde $r = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$; în plus pentru $2m > n$, $u(x_1, \ldots, x_n)$ are în origine derivate pînă la ordinul $2m - n - 1$.

Exemplu. Fie $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$ operatorul lui Laplace iterat de m ori. Polinomul $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (\Sigma\omega_i^2)^m$ este identic egal cu 1 pe sfera unitate Ω. Integralele (8), (10) și (11) se pot deci calcula cu ajutorul formulei (3), și pentru $2m < n$, sau pentru n impar și $2m \geqslant n$, obținem:

$$u(x) = C_{mn} r^{2m-n}.$$

Dacă $2m \geqslant n$ și n par, atunci trecînd în integrala (12) la coordonate sferice, obținem:

$$u(x) = C'_{mn} r^{2m-n} \ln r + C''_{mn} r^{2m-n}.$$

Ultimul termen se poate omite, căci el verifică ecuația omogenă $\Delta^m u = 0$.

6.2. Soluția fundamentală a ecuațiilor omogene regulate. Considerăm ecuația

$$(1) \qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_1, \ldots, x_n),$$

unde L este operator diferențial cu proprietatea că dacă înlocuim în expresia $\frac{\partial}{\partial x_i}$ cu ω_i, obținem un polinom omogen de grad m*). Vom presupune că aici *conul* $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ *nu are puncte singulare* (în afara originii), ceea ce înseamnă că în punctele în care $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ și $\Sigma\omega_j^2 \neq 0$ *gradientul lui* $L(\omega_1 \ldots, \omega_0)$ *nu se anulează*. În acest caz ecuația $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \delta(x)$ și operatorul $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ le vom numi *regulate*.

Am considerat în 6.1 cazul eliptic, cu m par și deci partea principală, $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq 0$ pentru $\Sigma\omega_j^2 \neq 0$. În cazul general, pe aceeași cale ajungem formal la expresia

$$(2) \qquad u(x_1, \ldots, x_n) = \int_\Omega \frac{f_{mn}(\Sigma x_i \omega_i)\, d\Omega}{L(\omega_1 \ldots, \omega_n)},$$

* În § 6.1, ordinul operatorului L era $2m$.

unde Ω este sfera unitate $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1$, $d\Omega$ — elementul de arie al acestei sfere, iar funcția f_{mn} are următoarea expresie: dacă n este par și $m \geqslant n$, atunci

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{(n/2)-1}}{(2\pi)^n (m-n)!} x^{m-n} \ln|x|; \tag{3}$$

dacă n par și $m < n$

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{(n/2)-m}(n-m-1)!}{(2\pi)^n} x^{m-n}; \tag{4}$$

iar dacă n este impar și $m \geqslant n$,

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4(2\pi)^{n-1}(m-n)!} x^{m-n} \operatorname{sgn} x; \tag{5}$$

iar dacă n este impar și $m < n$,

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \delta^{(n-m-1)}(x). \tag{6}$$

Dar acum, în general integrala (2) diverge, căci vom avea pe sfera unitate punctele în care $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$.

Totuși, dacă operatorul L este regulat și prin urmare varietatea P*) nu are puncte singulare (în afara originii), integrala (2) poate fi regularizată în modul următor:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\Omega} \frac{f_{mn}(\Sigma x_i \omega_i)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$$

unde

$$u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{f_{mn}(\Sigma x_i \omega_i)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}, \tag{7}$$

*) S-a notat prin P varietatea algebrică, mai precis conul definit de $L = 0$ (Nota trad.).

Am notat aici cu Ω_ε mulțimea acelor puncte pe sfera unitate pentru care $|L(\omega_1, \ldots, \omega_n)| > \varepsilon$.

Mai înainte de toate trebuie arătat că există limita distribuțiilor u_ε, deci că pentru orice funcție test φ există limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (u_\varepsilon, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = (u, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Să remarcăm că, dacă $f_{mn}(\Sigma x_i \omega_i)$ este definită de una din formulele (3)—(6), atunci (f_{mn}, φ) este o funcție indefinit derivabilă de $\omega_1, \ldots, \omega_n$, ceea ce se demonstrează printr-o simplă schimbare de variabilă în integrala ce reprezintă pe (f_{mn}, φ), și care transformă dependența de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ în dependența în raport cu φ.

Să notăm $(f_{mn}(\Sigma x_i \omega_i), \varphi)$ prin $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ și să arătăm că există limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega = (u, \varphi).$$

Pentru aceasta reprezentăm pe $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ sub forma $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$; funcțiile $r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ sînt indefinit derivabile și se anulează în afara unui domeniu suficient de mic S_i. Trebuie considerate doar integralele acelor funcții r_i, pentru care aderențele domeniilor S_i intersectează varietatea P. Putem astfel presupune că funcția $r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, pentru care trebuie stabilită existența limitei $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r\, d\Omega}{L}$, se anulează în afara unei vecinătăți suficient de mici a punctului A, aparținînd varietății P. În acest punct, ca și pe întreaga varietate P, gradientul lui L nu se anulează. Deci în punctul A una din derivatele $\frac{\partial L}{\partial \omega_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nu se va anula. În plus, avem în punctul A $\Sigma \omega_i^2 = 1$ și deci cel puțin una din coordonatele ω_i va fi nenulă. Pentru a fixa ideile, fie $\frac{\partial L}{\partial \omega_1} \neq 0$ și $\omega_n \neq 0$. În acest caz, în vecinătatea punctului A se poate introduce pe P, sistemul de coordonate $L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. În aceste condiții, $d\Omega$ se exprimă sub forma

$$d\Omega = I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\, dL\, d\omega_2, \ldots, d\omega_{n-1},$$

$I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ fiind o funcţie netedă. Prin urmare,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})}{L} dL\, d\omega_2, \ldots, d\omega_{n-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \left[\int_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i(L_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\, dL}{L} \right] d\omega_2 \ldots d\omega_{n-1}.$$

Cum integrala $\int_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i I dL}{L}$ converge pentru $\varepsilon \to 0$, către valoarea principală Cauchy, există limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega,$$

şi prin urmare şi limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} (u_n, \varphi).$$

Am demonstrat astfel că există regularizata după Cauchy a integralei

$$\int_{\Omega} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega. \tag{8}$$

Pentru fiecare regularizată a integralei (8) putem defini distribuţia (2)

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\Omega} \frac{f_{mn}(\Sigma\, x_i \omega_i)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega,$$

în modul următor

$$(u, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \int_{\Omega} \frac{(f_{mn}, \varphi)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega,$$

integrala fiind considerată în sensul regularizării considerate.

Pentru scopul nostru, ar conveni orice regularizată a integralei (8), care verifică următoarea condiţie: dacă funcţia r este de forma:

$$r(\omega_1, \ldots, \omega_n) = L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

cu r şi r_1 indefinit derivabile, atunci

$$\int_{\Omega} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega = \int_{\Omega} r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega. \tag{9}$$

Două regularizate care verifică condiţia (9), diferă între ele prin expresia

$$\int_{P} r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\mu, \tag{10}$$

unde P este ca mai înainte, mulţimea zerourilor polinomului $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ pe sfera unitate Ω, iar μ — o anumită măsură pe această varietate.

Într-adevăr, pentru funcţia r, anulîndu-se pe varietatea P, toate regularizatele integralei (8), verificînd (9) dau acelaşi rezultat (pentru că o astfel de funcţie se poate reprezenta sub forma $r = r_1 L$), deci diferenţa dintre două regularizate nu poate depinde de valorile funcţiei $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ în afara varietăţii P, nici de valorile derivatelor sale pe această varietate, şi deci este de forma (10).

Să arătăm acum că două regularizate ale integralei (2), verificînd (9), diferă printr-o soluţie a ecuaţiei omogene

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0.$$

Într-adevăr, diferenţa între aceste distribuţii se poate reprezenta, din (10) sub forma

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \int_{P} f_{mn}(\sum\, x_i \omega_i)\, d\mu.$$

Introducînd expresia obţinută în operatorul L, avem:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) s(x_1, \ldots, x_n) = \int_{P} L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, f_{mn}^{(m)}(\sum\, x_i \omega_i)\, d\mu.$$

şi cum integrala se efectuează pe varietatea P, unde $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$, ultima integrală se anulează.

Mai rămîne de arătat că integrala (2) dă într-adevăr soluţia ecuaţiei (1). Pentru a demonstra acest fapt aplicăm integralei (2) operatorul diferenţial $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Vom avea

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \int_P f_{mn}^{(m)}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega.$$

Folosind formulele (3)—(6) pentru funcţiile f_{mn} precum şi formulele de descompunere ale lui δ în unde plane (§2), obţinem dacă n este par,

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_\Omega \left(\sum x_i \omega_i\right)^{-n} d\Omega = \delta(x_1, \ldots, x_n);$$

iar dacă n este impar,

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Omega \delta^{(n-1)}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega = \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

Prin urmare, dacă conul $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ nu are puncte singulare, formulele (2)—(6) dau într-adevăr soluţia ecuaţiei $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \delta(x)$.

6.3. Soluţia fundamentală a problemei Cauchy. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0, \tag{1}$$

de ordin m în raport cu $\frac{\partial}{\partial t}$.

Vom indica ulterior condiţiile ce trebuie impuse acestei ecuaţii. Scopul nostru este de a construi soluţia problemei Cauchy pentru această ecuaţie (v. § 5.4). Cu alte cuvinte trebuie să găsim soluţia $u(x, t)$ verificînd condiţiile iniţiale

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(0, x)}{\partial t^{m-1}} = \delta(x).$$

Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia (1) în cazul unui număr oarecare de variabile independente o vom găsi reducîndu-ne la soluţia problemei Cauchy în două variabile independente. Referitor la ecuaţia (1) facem următoarea ipoteză:

Operatorul diferenţial

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tag{2}$$

are proprietatea că problema Cauchy pentru ecuaţia,

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_\omega = 0 \tag{3}$$

este corect pusă.

Să trecem acum la căutarea soluţiei fundamentale a problemei Cauchy pentru ecuaţia (1).

Avînd în vedere că

$$\delta(x) = \left.\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n},$$

considerăm pentru ecuaţia (1) (§ 3.9)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = 0$$

problema cu datele iniţiale

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{cases} \tag{4}$$

Dezvoltînd $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}$ după formula

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \Omega_n x_n|^\lambda \, d\Omega.$$

vom căuta soluția ecuației (1) cu condițiile inițiale (4), unde în ultima condiție membrul al doilea va fi înlocuit cu

$$\frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda.$$

Dacă vom căuta soluția acestei probleme sub forma

$$u_\omega(t, \xi, \lambda) = u_\omega(t, \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, \lambda),$$

ajungem la următoarea problemă în două variabile: a găsi soluția $u_\omega(t, \xi, \lambda)$ a ecuației (3)

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_\omega = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \omega_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) u_\omega = 0,$$

cu condițiile inițiale

$$(5) \quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial^k u_\omega(t, \xi, \lambda)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots m-2), \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} u_\omega(t, \xi, \lambda)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \dfrac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}. \end{cases}$$

Soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația (1) pe care o căutăm se va reprezenta sub forma

$$(6) \qquad u(t, x) = \int_\Omega u_\omega(t, x_1 \omega_1 + \ldots + x_n \omega_n, -n) \mathrm{d}\Omega.$$

Am făcut $\lambda = -n$ pentru că tocmai pentru această valoare a lui λ $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ se reduce la $\delta(x_1 \ldots, x_n)$.

Funcția $u_\omega(t, \xi, \lambda)$ se exprimă la rîndul său cu ajutorul soluției fundamentale $G_\omega(t, \xi)$ a problemei Cauchy pentru ecuația (3), și anume:

$$(7) \qquad u_\omega(t, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda \mathrm{d}\eta.$$

O formulă deosebit de simplă se obține în cazul unui număr impar de variabile; în acest caz

$$(8) \qquad u_\omega(t, \xi, -n) = C \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}} G_\omega(t, \xi).$$

Prin urmare, soluția fundamentală $u(t, x)$ a problemei Cauchy pentru ecuația (1) se exprimă prin intermediul soluției fundamentale $G_\omega(t, \xi)$ a problemei Cauchy pentru ecuația (3) prin formula

$$(9) \quad u(t, x) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_\Omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda \mathrm{d}\eta \right\} \mathrm{d}\omega \Big|_{\lambda=-n};$$

iar în cazul unui număr impar de variabile se obține formula mai simplă

$$(10) \qquad u(t, x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!} \int_\Omega \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}} G_\omega(t, \xi) \mathrm{d}\Omega.$$

În această formulă derivarea trebuie înțeleasă în sensul teoriei distribuțiilor, iar integrarea ca integrarea distribuțiilor depinzînd continuu de parametri.

Subliniem că formulele de mai sus sînt valabile pentru toate ecuațiile pentru care problema Cauchy este corect pusă, de pildă, pentru toate ecuațiile parabolice și hiperbolice.

Dacă dorim să evităm problema existenței convoluției în formula (7) și să obținem funcția $v_\omega(t, \xi, -n)$ sub o formă care face explicită posibilitatea integrării pe sfera unitate, putem face considerații analoage făcute în § 6.1.

Soluția problemei Cauchy pentru ecuații hiperbolice omogene. Formulele lui Herglotz-Petrovski.

Să examinăm mai detaliat cazul ecuațiilor hiperbolice, ce nu conțin derivate de ordin $<m$.

Operatorul omogen $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ se numește *hiperbolic*, dacă pentru orice $\omega_1, \ldots, \omega_n, \sum \omega_j^2 = 1$, ecuația de ordinul m în raport cu v,

$$P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0 \tag{11}$$

are m rădăcini reale și distincte.

Considerăm problema

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = 0 \tag{12}$$

cu condițiile

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} \dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{cases} \tag{13}$$

Cum am spus mai înainte, soluția acestei probleme se reduce la rezolvarea următoarei probleme Cauchy unidimensionale

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_\omega = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_\omega = 0, \tag{14}$$

cu condițiile

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^k u_\omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} u_\omega}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \dfrac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)}. \end{cases} \tag{15}$$

Este ușor de arătat că orice funcție de forma $f(\sum x_k \omega_k + v_j t)$ verifică ecuația (12), v_j fiind aici rădăcină a ecuației algebrice (11). Toate rădăcinile acestei ecuații sînt reale și distincte din cauza hiperbolicității ecuației (12). Soluția $f(\sum x_k \omega_k + v_j t)$ reprezintă o undă plană ce se propagă cu viteza $-v_j$.

Vom căuta soluția problemei Cauchy (14) — (15) sub forma unei sume de astfel de unde plane

$$u_\omega(t, \sum \omega_k x_k) = \sum_{j=0}^{m} c_j f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \omega_k + V_j t\right), \tag{16}$$

propagîndu-se cu vitezele $-v_j$. Sumarea în formula (16) se face după toate rădăcinile ecuației (11).

Condițiile inițiale definesc pe c_j și pe f din ecuațiile

$$\begin{cases} \sum c_j = 0, \ \sum c_j v_j = 0, \ \ldots, \ \sum c_j v_j^{m-2} = 0, \ \sum c_j v_j^{m-1} = 1, \\ f^{m-1}(\xi) = \dfrac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)} \end{cases} \tag{17}$$

Rezultă:

$$c_j = \frac{1}{(v_j - v_1) \ldots (v_j - v_{j-1})(v_j - v_{j+1}) \ldots (v_j - v_m)}. \tag{18}$$

Pentru a obține pe $f(\xi)$ trebuie integrat $|\xi|^\lambda$ de $m-1$ ori. Obținem:

$$f(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)} \left\{ \frac{|\xi|^{\lambda+m-1} (\operatorname{sgn} \xi)^{m-1}}{(\lambda+1) \ldots (\lambda+m-1)} + Q_\lambda(\xi), \right\} \tag{19}$$

unde

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{\xi^{m-2k-1}}{(2k-1)!\,(m-2k-1)!\,(\lambda-2k)} \tag{20}$$

(v. § 3.4).

Astfel, în cazul considerat soluția problemei Cauchy (14) — (15) a fost găsită sub formă explicită

$$u_\omega(t, \sum \omega_k x_k) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)} \times \tag{21}$$

$$\times \sum_{j=1}^{m} c_j \left\{ \frac{|\sum \omega_k x_k + v_j t|^{\lambda+m-1} [\operatorname{sgn}(\sum \omega_k x_k + v_j t)]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2) \ldots (\lambda+m+-1)} + Q_\lambda\left(\sum \omega_i x_i + V_j t\right) \right\},$$

unde c_j sînt definite de formulele (18), iar $Q_\lambda(\xi)$ de formula (20).

Soluţia problemei Cauchy (12) şi (13) se obţine din (21) integrînd pe sfera unitate $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$:

$$u(t, x_1, \ldots x_n; \lambda) = \int_\Omega u_\omega(t, \sum \omega_k x_k)\mathrm{d}\Omega. \tag{22}$$

Pentru $\lambda = -n$ se obţine din această formulă, ca mai înainte, soluţia fundamentală a problemei Cauchy. În formula (22) integrarea se face pe sfera unitate. Dar alegerea sferei ca suprafaţă de integrare este pur accidentală; din acest motiv vom transforma această formulă astfel încît ea să corespundă mai bine acestei probleme.

În formula (22), u_ω este suma a m termeni, dată de formula (21). Să considerăm cel de-al j-lea termen :

$$c_j \left\{ \frac{|\sum x_k\omega_k + v_j t|^{\lambda+m-1}[\operatorname{sgn}\sum x_k\omega_k + v_j t)]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} + Q(\sum x_k\omega_k + v_j t) \right\}.$$

Să efectuăm în integrala luată pe sfera Ω din acest termen, următoarea schimbare de variabile : $\dfrac{\omega_j}{v_k} = \xi_j$. Vom încerca să schimbăm integrarea pe Ω prin integrarea pe suprafaţa $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \equiv H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Pentru fiecare alegere a valorilor $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, ecuaţia $P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ are n rădăcini distincte v_j. Pentru că aceste rădăcini depind continuu de parametrii ω_j, putem urmări variaţia unei rădăcini atunci cînd variază ω_i. Atunci cînd punctul $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ parcurge sfera unitate Ω, punctul $(1, \xi, \ldots, \xi_n)$ parcurge o anumită componentă a suprafeţei $P(1, \xi, \ldots, \xi_n) = 0$.

Fiecare componentă poate fi de două tipuri: 1) trecînd de la $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ la $(-\omega_1, \ldots, -\omega_n)$ rădăcina v_j trece în altă rădăcină v_k; 2) la o astfel de variaţie v_j se transformă în ea însăşi. Componentele de primul tip le vom numi „ovale", componentele de tipul al doilea „bucăţi fără pereche". Se poate arăta că dacă ecuaţia este de ordin par, atunci suprafaţa $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ constă din $\dfrac{m}{2}$ ovale, iar dacă m este impar, există $\dfrac{m-1}{2}$ ovale şi o bucată fără pereche. Ne vom mărgini la primul caz (fig. 5); celălalt se tratează similar.

Astfel, trebuie să presupunem că, atunci cînd punctul $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ parcurge pe Ω, punctul $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ parcurge ovalul ce corespunde la două rădăcini distincte v_j şi v_k. De aceea atunci cînd vom

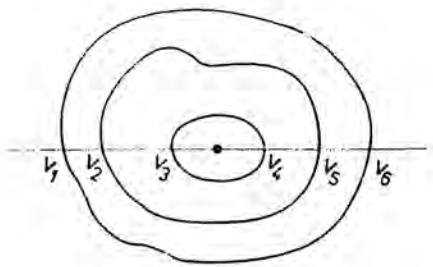

Fig. 5

suma integralele pe Ω corespunzînd termenilor din formula (21), vom obţine de două ori integrala calculată pe suprafaţa $H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Dacă notăm cu $\mathrm{d}\sigma$ elementul de arie al suprafeţei $H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ subîntinsă de unghiul solid sprijinindu-se pe $\mathrm{d}\Omega$, iar cu φ unghiul dintre normalele la $\mathrm{d}\sigma$ şi $\mathrm{d}\Omega$, atunci, evident

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{|\cos\varphi|\mathrm{d}\sigma}{|\xi|^{n-1}} = \frac{|\sum \xi_i H_{\xi_i}|\mathrm{d}\sigma}{|\xi|^n |\operatorname{grad} H|}.$$

Coeficientul c_j este egal cu

$$c_j = \frac{1}{(v_j - v_1)\ldots(v_j - v_{j-1})(v_j - v_{i+1})\ldots(v_j - v_m)} = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j}}$$

Din omogenitatea polinomului $P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n)$, rezultă

$$v_j \left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j} + \sum \omega_k \frac{\partial P}{\partial \omega_k} = mP(v_j\, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$$

(căci v_j este rădăcina ecuaţiei $P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$); şi deci

$$c_j = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j}} = -\frac{v_j}{\sum \omega_k \left.\dfrac{\partial P}{\partial \omega_k}\right|_{v=v_j}}.$$

Înlocuind pe ω_k prin $v_j\xi_k$ și $P(1, \xi_1, \ldots \xi_n)$ cu $H(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, obținem:

$$c_j = -\frac{v_j^{1-j}}{\sum_{k=1}^{m} \xi_k H_{\xi_k}} = -\frac{(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1} |\xi|^{m-1}}{\sum \xi_k H_{\xi_k}}.$$

În continuare,

$$|\sum x_k\omega_k + v_j t|^{\lambda+m-1} [\operatorname{sgn}(\sum x_k\omega_k + v_j t)]^{m-1} =$$
$$= |v_j|^{\lambda+m-1} (\operatorname{sgn} v_j)^{m-1} |\sum x_k\xi_k + t|^{\lambda+m-1} [\operatorname{sgn}(\sum x_k\xi_k + t)]^{m-1}$$

și pentru orice j, avem:

$$(\sum x_k\omega_k + tv_j)^{m-2k-1} = v_j^{m-2k-1} (\sum x_k\xi_k + t)^{m-2k-1} =$$
$$= \left(\frac{(\sum \xi_k\omega_k + t)}{|\xi|}\right)^{m-2k-1} (\operatorname{sgn} v_j)^{m-2k-1}.$$

Introducînd expresiile lui c_j, $d\omega$ și ale funcției de $\sum x_k\omega_k + v_j t$ formula (22), obținem:

$$u(t, x_1, \ldots, x_n; \lambda) = -\frac{2}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times$$

(23)

$$\times \int_{H=0} \left\{ \frac{|\xi|^{-\lambda-n} |\sum x_k\xi_k + t|^{\lambda+m-1} \operatorname{sgn} (\sum x_k\xi_k + t)^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2) \ldots \lambda+m-1} + \right.$$
$$\left. + Q\left(\frac{\sum x_k\xi_k + t}{|\xi|}\right)\right\} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn} \sum \xi_k H_{\xi_k}|}$$

Trecerea la limită pentru $\lambda \to -n$ ne dă formula lui Herglotz-Petrovski ce exprimă soluția fundamentală a problemei Cauchy. Dacă n este impar, formula este

$$u(t, x_1, \ldots x_n) = -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!} \times$$

(24)

$$\times \int_{H=0} (\sum x_k\xi_k + t)^{m-n-1} [\operatorname{sgn}(\sum x_k\xi_k + t)]^{m-1} \omega,$$

unde am notat cu ω expresia $\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k H_{\xi_k}\right)}$. Formule avînd o structură asemănătoare vor fi studiate amănunțit în capitolul III.

Polinoamele $Q\left(\frac{\sum \xi_k x_k + t}{|\xi|}\right)$ dispar cînd trecem la limită, integralele lor fiind nule. Pentru n par se obține formula

$$u(x_1, \ldots, x) = \frac{2(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n (m-m-1)!} \times$$

(25)

$$\times \int_{H=0} (\sum x_k\xi_k + t)^{m-n-1} \ln \left| \frac{\sum x_k\xi_k + t}{\sum x_k\xi_k} \right| \omega.$$

În cazul în care ordinul m al ecuației este inferior lui $n-1$, formulele dînd soluția fundamentală a problemei Cauchy capătă forma:

pentru n impar,

$$(26) \qquad u(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{H=0} \delta^{(n-m)} (\sum x_k\xi_k + t)\, \omega,$$

iar pentru n par:

$$(27) \quad u(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} (n-m)!}{(2\pi)^n} \int_{H=0} \frac{\omega}{(\sum x_k\xi_k + t)^{n-m+1}}.$$

Utilizînd descompunerea invariantă a distribuției δ în unde plane (§ 3.11, formulele (4) și (5)) și alegînd ca domeniu de integrare suprafața $H = 0$, s-ar fi putut obține formulele (24) — 27) pe o cale mai directă, evitînd totodată integrarea pe sfera unitate.

ANEXA I

PROPRIETĂȚILE LOCALE ALE DISTRIBUȚIILOR

Am afirmat în § 1 că distribuțiile pot fi definite local, adică pe funcțiile test diferite de zero doar în vecinătatea unei vecinătăți oricît de mici a fiecărui punct.

În această anexă vom obține acest rezultat, împreună cu altele, toate în legătură cu proprietățile locale ale distribuțiilor; astfel de rezultate au numeroase aplicații.

Începem prin a ne reîntoarce la studiul spațiului K al funcțiilor test. Arătăm că printre funcțiile test există unele luînd valori constante arbitrare, date dinainte pe mulțimi compacte ce nu se intersectează. Tocmai existența acestor funcții test permite obținerea pe o cale cît mai simplă a proprietăților locale ale distribuțiilor.

I.1. *Construcția funcțiilor test cu ajutorul medierii funcțiilor continui.*

Arătăm că *pentru orice funcție continuă* (nu neapărat cu suport compact) $f(x)$ *se pot construi funcții indefinit derivabile* $f_\delta(x)$, *cu proprietate că pentru* $\delta \to 0$:

$$f_\delta(x) \to f(x),$$

convergența fiind uniformă pe orice compact.

Drept $f_\delta(x)$ alegem o mediere a funcției $f(x)$ de forma

$$f_\delta(x) = C_\delta \int_{|x-\xi|<\delta} f(\xi)\varphi(x-\xi,\ \delta)\,d\xi, \tag{1}$$

în care $\varphi(x, \delta)$ este funcția cu care ne-am întîlnit în § 1.2:

$$\varphi(x,\delta) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2-|x|^2}} & \text{pentru } |x|<\delta, \\ 0 & \text{pentru } |x|>\delta, \end{cases} \qquad \frac{1}{C_\delta} = \int_{|x|<\delta} \varphi(x,\delta)\,dx.$$

Se vede din expresia (1) că funcția $f_\delta(x)$ este indefinit derivabilă odată cu funcția $\varphi(x, \delta)$. Avem apoi

$$f(x) - f_\delta(x) =$$

$$= C_\delta \int_{|x-\xi|<\delta} f(x)\ \varphi(x-\xi,\ \delta)\,d\xi - C_\delta \int_{|x-\xi|<\delta} f(\xi)\varphi(x-\xi,\delta)\,d\xi =$$

$$= C_\delta \int_{|x-\xi|<\delta} [f(x) - f(\xi)]\varphi(x-\xi,\ \delta)\,d\xi.$$

Cum $f(x)$ este o funcție continuă, cantitatea $|f(x) - f(\xi)|$ va putea fi făcută, pentru x și ξ într-un compact fixat dar altfel arbitrar, inferioară unui ε dat, dacă $|x-\xi|<\delta$ și pentru δ ales suficient de mic.

Cu această alegere a lui δ, obținem

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leqslant \varepsilon\, C_\delta \int_{|\xi-x|<\delta} \varphi(x-\xi,\delta)\,d\xi = \varepsilon.$$

În particular, *dacă funcția* $f(x)$ *este cu suport compact, atunci și* $f_\delta(x)$ *este cu suport compact*: $f_\delta(x) = 0$ *în afara unei* δ*-vecinătăți a suportului funcției* $f(x)$.

Dacă funcția $f(x)$ este constantă în bila de rază δ, centrată în punctul x_0,

$$f(x) = f(x_0) \text{ pentru } |x - x_0| < \delta,$$

atunci

$$f_\delta(x_0) = f(x_0)C_\delta \int_R \varphi(x-\xi,\ \delta)\,d\xi = f(x_0).$$

Prin urmare, *dacă funcția* $f(x)$ *este constantă în domeniul* G, *atunci* $f_\delta(x)$ *este constantă* (și egală cu $f(x)$) *în domeniul* G_δ, *constînd din punctele* $x \in G$, odată cu o bilă de rază δ și centrată în x.

Să mai remarcăm că dacă valorile lui $f(x)$ sînt cuprinse între 0 și 1, atunci același lucru se întîmplă și cu valorile funcției $f_\delta(x)$.

Demonstrăm acum că, *dacă* F *este un compact și* U *o mulțime deschisă care îl conține, există o funcție test identic egală cu* 1 *pe* F, 0 *în afara lui* U *și avînd valorile cuprinse între* 0 *și* 1 *în celelalte puncte.*

Într-adevăr, F fiind mărginită ea este conținută în U odată cu o ε-vecinătatea sa, pentru un anumit $\varepsilon > 0$. Notăm cu F_1 aderența $\frac{\varepsilon}{3}$ — vecinătății mulțimii F, cu U_1, $\frac{2\varepsilon}{3}$ — vecinătatea deschisă a lui F și cu W complementara sa (față de întreg $\mathbf{R}^n$). Funcția continuă de x

$$\rho(x, W) = \min_{y \in W} \rho(x, y)$$

este pozitivă pe U_1 și pe mulțimea F_1 are un minim pozitiv μ.

Funcția

$$f(x) = \min\left\{\frac{1}{\mu}\,\rho(x, W),\ 1\right\}$$

este de asemenea continuă, nulă pe U_1 și 1 pe F, iar în celelalte puncte are valori cuprinse între 0 și 1. Drept funcția test căutată este suficient de a alege $f_\delta(x)$ cu $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

I.2. *Partiția unității.*

Fie o acoperire numărabilă a spațiului $\mathbf{R}^n$ — cu deschiși mărginiți, $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$, care să fie local finită, adică astfel încît fiecare punct să fie acoperit doar de un număr finit de mulțimi U_j. Trebuie construit un șir de funcții infinit derivabile $e_1(x), e_2(x), \ldots$ $\ldots, e_m(x), \ldots$ astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții:

a) $0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1$;

b) $e_k(x) = 0$ în afara mulțimii $U_k (k = 1, 2, \ldots)$;

c) $e_1(x) + e_2(x) + \ldots + e_m(x) + \ldots \equiv 1$.

În membrul stîng, din condiția b), rezultă că pentru orice x nu figurează decît un număr finit de termeni nenuli. Familia funcțiilor $\{e_i(x)\}$ se numește *partiție a unității*, mai precis, partiția unității corespunzătoare acoperirii $\{U_i\}$.

Construcția partiției unității se poate face astfel. Mai întîi se consideră o altă acoperire a spațiului $\mathbf{R}^n$, constînd din mulțimile deschise $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ cu proprietatea că închiderea $\overline{V}_k (k = 1, 2, \ldots)$ este inclusă în U_k. Într-adevăr să presupunem deschișii $V_1 \ldots, V_{k-1}$, deja construiți, astfel încît $\overline{V}_i \subset U_i$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, k-1)$ și astfel ca $V_1, \ldots, \overline{V}_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots$ să constituie o acoperire local finită a spațiului $\mathbf{R}^n$. Complementarea mulțimii deschise $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \ldots$ este o mulțime închisă, F_k care este inclusă în U_k. Putem alege drept mulțime V_k orice deschis care include pe F_k și a cărui închidere este inclusă în U_k, ș.a.m.d.

Mulțimea $\overline{V}_k$ fiind compactă, în virtutea rezultatelor de la p. I.1, există o funcție infinit derivabilă $h_k(x)$ avînd valorile cuprinse între 0 și 1, egală cu 1 pe V_k și 0 în afara lui U_k. Punem

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x).$$

Această funcție există pentru toți x și nu este inferioară lui 1. Dacă punem acum

$$e_k(x) = \frac{h_k(x)}{h(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

este evident că funcțiile $e_k(x)$ constituie o partiție a unității.

Observație. Fie $\{e_i(x)\}$ o partiție a unității corespunzînd acoperirii (local finite) $\{U_i\}$ a spațiului $\mathbf{R}^n$. În acest caz, pentru orice funcție test $\varphi(x)$ avem:

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_i(x), \tag{1}$$

unde $\varphi_i(x) = \varphi(x)\, e_i(x)$ este o funcție test, nulă în afara mulțimii U_i. Numărul de termeni nenuli într-un punct x oarecare care figurează în (1) este finit dacă se face ipoteza suplimentară că fiecare bilă $|x| \leqslant n$ intersectează doar un număr finit de deschiși U_i. Să mai remarcăm că dacă funcțiile $\varphi_\nu(x)$ tind către zero în spațiul K pentru $\nu \to \infty$, atunci și fiecare șir $\varphi_{\nu i}(x) = \varphi_\nu(x)\, e_i(x)$ tinde către zero pentru $\nu \to \infty$ în spațiul K.

I.3. *Proprietăți locale ale distribuțiilor.*

În § 1.4, am dat următoarea definiție: distribuția f este nulă într-o vecinătate a unui punct dat dacă, pentru orice funcție test φ, avînd suportul conținut în acea vecinătate, are loc egalitatea $(f, \varphi) = 0$.

În continuare vom spune că distribuția f este nulă într-un deschis G, dacă ea este nulă într-o anumită vecinătate a fiecărui punct aparținînd lui G. Aceasta este tipic o definiție *locală*.

Se poate da altă definiție, *nelocală* a anulării unei distribuții f în domeniul G; *distribuția f este nulă în domeniul G*, dacă pentru orice funcție test φ, cu suportul Q conținut în G, avem $(f, \varphi) = 0$.

Indicăm demonstrația echivalenței acestor două definiții. Este suficient de arătat că faptul de a fi egal cu zero în sensul definiției nelocale rezultă din anularea în sensul definiției locale (reciproca este evidentă). Să presupunem deci că f se anulează pe G în sensul definiției locale, și fie $\varphi(x)$ o funcție test ce este diferită de zero doar pe mulțimea Q, a cărei aderență $\overline{Q}$ este conținută în G. Fiecărui punct $x \in \overline{Q}$ i-se poate găsi, prin ipoteză, o vecinătate U în care distribuția f este zero. Fără a micșora generalitatea putem presupune pe U mărginită. Familia acestor vecinătăți constituie o acoperire a mulțimii $\overline{Q}$, de unde, din lema lui Heine-Borel, putem alege o acoperire numărabilă $U_1, U_2, \ldots, U_m \ldots$ avînd proprietatea că fiecare bilă $|x| \leqslant n$ intersectează doar un număr finit de vecinătăți U_i. Conform observației de la finele punctul I. 2, funcția $\varphi(x)$ se poate scrie sub forma

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) + \ldots,$$

unde $\varphi_k(x)$ are suportul conținut în U_k. Suma de mai sus are sens datorită faptului că acoperirea U_i este local finită. Din ipoteză $(f, \varphi_k) = 0$ și deci $(f, \varphi) = \sum (f, \varphi) = 0$ c. t.a.

Avem corolarul evident dar important: *distribuția f, nulă în vecinătatea fiecărui punct, este nulă, adică pentru orice funcție test* φ

$$(f, \varphi) = 0.$$

Să mai remarcăm încă o consecință: *dacă funcția test* $\varphi(x)$ *este nulă într-o vecinătate* U *a suportului* F *al distribuției* f, *atunci* $(f, \varphi) = 0$

Într-adevăr, în conformitate cu definiția locală, $f = 0$ în afara lui F și nu ne rămîne decît să aplicăm definiția nelocală. Am spus mai înainte că două distribuții f și g coincid în vecinătatea unui punct x_0 dacă diferența lor $f - g$ este nulă în vecinătatea acestui punct. Din propoziția demonstrată mai sus rezultă că *distribuțiile ce coincid cu vecinătatea fiecărui punct sînt egale.* Astfel fiecare distribuție este unic determinată de valorile sale locale.

Se poate utiliza această proprietate pentru a construi global o distribuție, atunci cînd ea este dată local. Anume, să presupunem că fiecărui punct x_0 îi corespunde o vecinătate $U(x_0)$, astfel ca, pentru toate funcții test $\varphi(x)$, avînd suportul conținut în $U(x_0)$, sînt date numerele (f, φ) depinzînd liniar și continuu de φ. Mai presupunem că numărul (f, φ) depinde doar de funcția φ și nu de alegerea punctului x_0, pentru care $\varphi(x)$ se anulează în afara vecinătății $U(x_0)$. Se poate afirma în aceste condiții că *există o funcțională pe spațiul* K, *ce coincide cu funcționala* f *pe acei* $\varphi(x)$ *pentru care funcționala* f *este definită.*

Pentru demonstrație vom proceda astfel.

Prin ipoteză, pentru fiecare punct există o vecinătate $U(x_0)$ ca mai sus, și prin urmare aceste vecinătăți constituie o acoperire a spațiului $\mathbf{R}^n$. Fără a micșora generalitatea putem presupune că toate aceste vecinătăți sînt mărginite ca mai înainte; folosind lema lui Heine-Borel, putem extrage din această acoperire o acoperire numărabilă $U_1, \ldots, \ldots U_m, \ldots$ avînd proprietatea că fiecare bilă $|x| < n$ intersectează doar un număr finit de vecinătăți U_i. Conform observației de la § I.2 orice funcție test $\varphi(x)$ se poate scrie

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \varphi_i(x), \tag{1}$$

unde $\varphi_i(x)$ este o funcție test, nulă în afara lui U_i, iar suma din membrul drept este întotdeauna finită. Pentru toți termenii este definită

valoarea funcționalei f. Definim atunci

$$(f, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_i). \tag{2}$$

Am obținut astfel evident o funcțională liniară pe spațiul funcțiilor test. Ea este și continuă. Într-adevăr, dacă șirul funcțiilor fundamentale tinde către zero în spațiul K, atunci, cum s-a remarcat în § I.2, $\varphi_m(x) \to 0$ în K pentru orice m fixat. Suma (1) conține un număr finit de termeni căci suporturile funcțiilor sînt toate incluse într-un același compact. Deci $(f, \varphi) \to 0$.

Este evident că valorile funcționalei astfel construite pe funcțiile test nule în afara vecinătății U_m coincid cu valorile funcționalelor, căci în acest caz toate φ_i ce figurează în membrul drept din (1) sînt identic nule în afara lui U_m.

Rezultă de aici că funcționala astfel definită f nu depinde de alegerea acoperirii U_i cu proprietățile indicate mai sus: dacă V_i este o altă acoperire cu aceste proprietăți și g este funcționala ce se deduce, atunci $f = g$ local și prin urmare și global.

I.4. *Derivarea ca operație locală.*

Am spus că o distribuție este nulă în vecinătatea punctului x_0 dacă ea se anulează pe orice funcție test avînd suportul conținut în acea vecinătate. Arătăm acum că în acest caz *și toate derivatele distribuției* f *se anulează în aceiași vecinătate.* Într-adevăr, dacă funcția test este diferită de zero doar în vecinătatea $U(x_0)$, atunci și toate derivatele vor fi nenule doar în acea vecinătate, deci pentru orice astfel de funcție avem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0.$$

De aici rezultă că funcționalele ce coincid în domeniul G au în acest domeniu derivatele de orice ordin identice.

Fie de exemplu o funcțională f ce coincide în G cu o funcțională regulată, corespunzînd unei funcții derivabile f. Atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ coincide în G cu funcționala regulată generată de funcția $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$. Astfel, chiar pentru distribuțiile singulare, *acolo unde se poate deriva în sens uzual, obținem derivate uzuale.*

Altă consecință din cele spuse este faptul următor : dacă funcționala f *este concentrată pe mulțimea* F, *atunci și derivatele sale* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ *ș.a.m.d. sînt toate concentrate pe mulțimea* F.

De exemplu, derivatele distribuției $\delta(x - x_0)$ sînt concentrate în punctul x_0 (ceea ce este imediat); orice derivată a unei funcții continue ce are suportul conținut în mulțimea închisă F, are de asemenea suportul conținut în aceeași mulțime F.

Este remarcabil faptul că aceste afirmații admit reciproce.

1°. Orice distribuție, concentrată într-un singur punct, se poate reprezenta ca o combinație liniară finită de $\delta(x - x_0)$ și de derivatele sale.

2°. Orice distribuție avînd drept suport mulțimea închisă F poate fi reprezentată, pentru orice $\varepsilon > 0$ ca o combinație liniară (finită) de derivate de funcții continui, anulîndu-se identic în afara ε-vecinătății mulțimii F.

Demonstrațiile afirmațiilor 1° și 2° vor fi date în volumul al doilea (cap. II, § 4).

ANEXA II

DISTRIBUȚII DEPINZÎND DE UN PARAMETRU

În această anexă vor fi considerate proprietățile distribuțiilor depinzînd de parametri, în particular proprietățile distribuțiilor ce depind analitic de parametri. Aceste proprietăți sînt în mare măsură asemănătoare proprietăților funcțiilor analitice uzuale și în majoritatea cazurilor se demonstrează reducîndu-le la acestea. O teoremă esențială este teorema de completitudine * a spațiului distribuțiilor : dacă s-a dat un șir de distribuții $f_1, f_2, \ldots, f \ldots$ astfel încît șirul numeric (f_ν, φ) are limită pentru orice φ, atunci $\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi)$ definește o distribuție. Demonstrația acestei teoreme va fi dată în anexa de la finele acestui volum.

II. 1. *Funcții continui.*

Fiecărei valori reale sau complexe a parametrului λ, parcurgînd o anumită mulțime Λ, i se asociază o distribuție f_λ. În conformitate

* Este vorba de completitudine prin șiruri. (Nota trad.).

cu definiția dată în § 1.8, distribuția f se numește *limita distribuțiilor* f_λ *pentru* $\lambda \to \lambda_0$ *dacă funcția numerică* (f_λ, φ) *converge către* (f, φ) *pentru orice* φ.

Funcția f_λ se numește continuă în raport cu λ în domeniul Λ, dacă pentru orice $\lambda_0 \in \Lambda$ are loc relația $f_{\lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda$.

Să considerăm acum chestiunea extrem de importantă privind posibilitatea de a prelungi prin continuitate distribuția f_λ depinzînd continuu de λ.

Să considerăm o astfel de distribuție f_λ definită și continuă pe mulțimea Λ și fie λ_0 un punct de acumulare al mulțimii Λ în care distribuția f_λ nu este definită. Se ridică problema posibilității definirii distribuției f_λ și în punctul λ_0, astfel încît să se obțină o funcție continuă de λ pe $\Lambda \cup \{\lambda_0\}$.

Este evident că o condiție necesară pentru posibilitatea unei astfel de prelungiri este posibilitatea prelungirii tuturor funcțiilor numerice (f_λ, φ) în punctul λ_0. *Această condiție este și suficientă*; într-adevăr, dacă pentru orice funcție test φ și orice șir $\lambda_\nu \to \lambda_0$, $\lambda_\nu \in \Lambda$ există limita șirului de numere $(f_{\lambda_\nu}, \varphi)$, atunci datorită completitudinii spațiului distribuțiilor, există o distribuție $f = f_{\lambda_0}$ care va fi limita șirului f_{λ_ν}. Se arată ca de obicei că această distribuție nu depinde de alegerea șirului $\lambda_\nu \to \lambda_0$.

Să remarcăm de asemenea că derivata (în raport cu x) unei distribuții depinzînd continuu de parametrul λ, depinde la rîndul său continuu de parametrul λ. Căci așa cum am văzut în § 2.4 din $f_{\lambda_\nu} \to f_\lambda$, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_\nu} \to \frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_0}$$

Distribuțiile ce depind continuu de un parametru se pot integra în raport cu acest parametru (v. § 3.10). Fie, de pildă, funcționala f_λ continuă în raport cu λ, parcurgînd o curbă rectificabilă Γ. Să formăm suma

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j'} \Delta\lambda_j$$

considerînd o diviziune a lui Γ prin $n + 1$ puncte $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n$ și alegînd în mod arbitrar λ_j', din intervalul $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$. Pentru $|\Delta\lambda_j| \to 0$,

vom avea pentru orice funcție test φ, și datorită continuității expresiei (f_λ, φ), că limita expresiei

$$(s_n, \varphi) = \sum_{j=1}^{n} (f_{\lambda_j'}, \varphi)\, \Delta\lambda_j$$

există, nu depinde de diviziunea lui Γ și de alegerea punctelor λ_j', și că este egală cu integrala pe Γ a funcției (f_λ, φ). Această limită definește prin urmare o funcțională continuă pe spațiul funcțiilor test; ea se numește *integrala distribuției f_λ pe curba* Γ. Bineînțeles se poate integra și pe un domeniu cu un număr arbitrar de dimensiuni.

I.2. *Funcții derivabile.*

În § 3.1, s-a dat următoarea definiție: distribuția g se numește *derivata* funcției f_λ în raport cu parametrul λ pentru $\lambda = \lambda_0$, dacă

$$g = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Pentru existența derivatei $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x}$ *pentru* $\lambda = \lambda_0$ *este necesar și suficient ca toate funcțiile numerice* (f, φ) *să fie derivabile în raport cu* λ *pentru* $\lambda = \lambda_0$.

Necesitatea acestei condiții este evidentă, să demonstrăm suficiența sa. Prin ipoteză, pentru orice φ și orice șir $\lambda_\nu \to \lambda_0$ există limita raportului

$$\frac{(f_\nu, \varphi) - (f_{\lambda_0}, \varphi)}{\lambda - \lambda_0} = \left(\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}, \varphi\right).$$

Dar atunci, așa cum s-a arătat mai sus, distribuția $\dfrac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ definită pentru $\lambda \neq \lambda_0$ se poate prelungi prin continuitate în $\lambda = \lambda_0$; cu alte cuvinte există distribuția limita raportului $\dfrac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ pentru $\lambda \to \lambda_0$ adică ceea ce trebuia arătat.

Dacă f_λ are derivată în raport cu λ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, atunci funcția f_λ se numește *derivabilă în raport cu* λ *în domeniul* Λ. Se definesc analog derivatele de ordin superior în raport cu parametrul și derivabilitatea de ordin superior.

Este ușor de arătat că dacă funcția f este derivabilă în raport cu λ în Λ, atunci și toate derivatele lui f_λ în raport cu x sînt derivabile în λ și are loc formula

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda. \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru orice funcție test, funcția numerică

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda, \varphi\right) = \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

este derivabilă în λ și are derivata

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_\lambda, -\frac{\partial x}{\partial \varphi_j}\right) = \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda, \varphi\right).$$

Aceasta înseamnă că funcționala $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda$ are derivată în raport cu λ și este valabilă formula (1), adică ceea ce se afirmase.

II. 3. *Funcții analitice.*

Dacă λ este un parametru complex, parcurgînd mulțimea deschisă Λ, atunci distribuția f_λ, derivabilă în raport cu λ în Λ, se numește *funcție analitică de* λ. În acest caz, toate funcțiile numerice (f_λ, φ) sînt funcții analitice obișnuite de λ în Λ. Și reciproc, *dacă pentru o distribuție* f_λ *toate funcțiile numerice* (f_λ, φ) *sînt analitice în* λ, *pentru* $\lambda \in \Lambda$, *atunci* f_λ *este o funcție analitică de* λ (v. § 3.1). *În acest caz în fiecare punct* λ *al lui* Λ *există derivatele* $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}, \ldots$ *și în vecinătatea punctului* $\lambda_0 \in \Lambda$ *este valabilă dezvoltarea în serie Taylor*

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \ldots \tag{2}$$

Într-adevăr, distribuția $\dfrac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial x}$ există, căci prin ipoteză pentru $\lambda = \lambda_0$ toate funcțiile numerice (f_λ, φ) au derivată în raport cu λ; din același motiv există și derivatele de ordin superior $\dfrac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2}, \ldots$. În continua-

re, pentru orice funcție test $\varphi(x)$ este valabilă dezvoltarea în serie Taylor a funcției analitice (f_λ, φ):

$$(f_\lambda, \varphi) = (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_\lambda, \varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(f_\lambda, \varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} + \ldots = (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda}, \varphi\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2}, \varphi\right) + \ldots = (f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2} + \ldots, \varphi),$$

de unde rezultă valabilitatea dezvoltării (2).

Două funcții analitice f_λ și g_λ definite în domeniul Λ și care coincid pe o mulțime de puncte λ, având un punct de acumulare în Λ, coincid pe Λ. Într-adevăr, pentru orice funcție test $\varphi(x)$, expresiile (f_λ, φ) și (g_λ, φ) coincid în domeniul Λ pe baza teoremei clasice de unicitate a funcțiilor analitice.

Pe această proprietate se bazează importanta metodă de prelungire analitică a funcționalei f_λ după parametrul λ. Să presupunem că funcționala f_λ este analitică în domeniul Λ. Să mai presupunem că toate funcțiile numerice (f_λ, φ) admit o prelungire analitică într-un domeniu mai mare Λ_1. Putem afirma în acest caz că numerele (f_{λ_1}, φ) pentru orice $\lambda_1 \in \Lambda_1$ definesc de asemenea o funcțională liniară pe spațiul K. Într-adevăr, prelungirea analitică în orice punct al domeniului Λ_1 se poate face, după cum se știe, cu ajutorul unui număr finit de dezvoltări în serie Taylor. Deoarece fiecare serie Taylor

$$(f_\lambda, \varphi) = (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda}, \varphi\right) + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial\lambda^2}\lambda_0, \varphi\right) + \ldots,$$

converge pentru orice funcție test φ și pentru că raza sa de convergență depinde de configurația domeniilor Λ și Λ_1 și nu depinde de φ, are ca sumă în discul său de convergență o funcțională liniară continuă.

Este evident că derivatele (în raport cu x) ale unei distribuții analitice f_λ sînt de asemenea distribuții analitice de λ. Să remarcăm apoi că prelungirea analitică păstrează multe proprietăți ale funcționalei f_λ. De pildă, dacă funcționala f_λ este invariantă în domeniul Λ față de operația u, astfel încît $f_\lambda(ux) = f_\lambda(x)$ atunci și prelungirea sa

analitică în Λ_1 este invariantă față de această operație. Într-adevăr, egalitățile

$$(f_\lambda(ux), \varphi(x)) = (f_\lambda(x), \varphi(x)) = (f_\lambda(x), \varphi(u^{-1}x)),$$

valabile în domeniul Λ, rămîn valabile și în Λ_1, din cauza unicității prelungirii analitice. Astfel, de exemplu, funcționalele cu simetrie sferică au, de asemenea, și prelungirile analitice respective cu simetrie sferică.

Să remarcăm în încheiere, că prelungirea analitică a unei distribuții depinzînd de un parametru, așa cum se întîmpla cu prelungirea analitică a funcțiilor analitice obișnuite, poate conduce la funcții cu singularități izolate (poli sau singularități esențiale) precum și la funcții multiforme.

În vecinătatea unui punct singular izolat λ_0, distribuția analitică f_λ admite o dezvoltare în serie Laurent sub forma clasică:

$$f_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_0)^n,$$

în care c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sînt funcționale fixate (ce nu depind de λ). Într-adevăr, dezvoltarea în serie Laurent are loc pentru orice funcție test φ):

$$(f_\lambda, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

coeficienții $c_n(\varphi)$ exprimîndu-se cu ajutorul formulelor lui Cauchy

$$(3) \qquad c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f_\lambda, \varphi)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\,d\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

Γ fiind un contur în domeniul de analiticitate al lui f_λ, înconjurînd punctul λ_0. Integrala (3) se poate reprezenta sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}, \varphi\right)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (g_\lambda, \varphi)d\lambda, \quad g_\lambda = \frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$$

și, cum s-a arătat, va fi de asemenea o funcțională liniară continuă de φ. Putem pune deci $c_n(\varphi) = (c_n, \varphi)$, unde c_n este o funcțională liniară și continuă.

Așadar, $f_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_0)^n$, așa cum se afirmase.

Capitolul II

TRANSFORMAREA FOURIER A DISTRIBUȚIILOR

§ 1. Transformarea Fourier a funcțiilor test

1.1. Transformarea Fourier a funcțiilor din spațiul K. Din acest moment vom considera spațiul K al funcțiilor test cu valori complexe (v. cap. I, § 1.9) și spațiul corespunzător K' al distribuțiilor.

Să considerăm pentru început cazul unei singure variabile.

Fie $\varphi(x)$ o funcție test oarecare. Transformata sa Fourier este dată de:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx. \tag{1}$$

Funcția $\psi(\sigma)$ va fi notată de asemenea $\tilde{\varphi}(x)$ sau $F[\varphi(x)]$.

Funcția $\varphi(x)$ fiind cu suport compact, integrala (1) este de fapt considerată pe un compact, de pildă $-a \leqslant x \leqslant a$; de aceea funcția $\psi(\sigma)$ poate fi definită și pentru valori complexe ale lui $s = \sigma + i\tau$:

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{isx} dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{i\sigma x} e^{-\tau x} dx. \tag{2}$$

Integrala (2) putînd fi derivată în raport cu parametrul complex $s = \sigma + i\tau$, rezultă că $\psi(\sigma + i\tau)$ va fi o funcție analitică întreagă. Derivarea funcției $\varphi(x)$ duce la înmulțirea lui $\psi(s)$ cu $-is$; într-adevăr,

$$\int_{-a}^{a} \varphi'(x) e^{isx} dx = \varphi(x) e^{isx} \Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} is\varphi(x) e^{isx} dx = -is\psi(s).$$

Repetînd derivarea obținem, pentru orice $q = 0, 1, 2, \ldots$,

$$F[\varphi^{(q)}(x)] = (-is)^q F[\varphi(x)] \tag{3}$$

și în general

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right] = P(-is)F[\varphi(x)], \tag{4}$$

$P(t)$ fiind un polinom arbitrar cu coeficienți constanți. Totodată, obținem și evaluarea

$$|s|^q \psi(s)| = \left| \int_{-a}^{a} \varphi^{(q)}(x) e^{isx} dx \right| \leqslant C_q e^{a|\tau|}.$$

Prin urmare, transformata Fourier $\psi(s)$ a unei funcții test arbitrare $\varphi(x)$, avînd suportul conținut în mulțimea $|x| \leqslant a$ este o funcție analitică întreagă de variabile $s = \sigma + i\tau$, ce verifică pentru orice $q = 0, 1, 2, \ldots$ inegalitatea

$$|s^q \psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}. \tag{5}$$

Afirmăm că și reciproca este adevărată: *orice funcție întreagă $\psi(s)$, verificînd pentru orice q inegalitatea (5), este transformata Fourier a unei funcții indefinit derivabile $\varphi(x)$, anulîndu-se identic pentru $|x| \geqslant a$.*

Vom defini, în mod natural, funcția $\varphi(x)$ prin formula

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Folosind formula lui Cauchy, se poate înlocui integrarea pe axa reală cu integrarea pe o dreaptă paralelă:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau) e^{i(\sigma+i\tau)x} dx = \frac{1}{2\pi} e^{\tau x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

și din cauza evaluării (5) integrala rămîne absolut convergentă. Ea rămîne de asemenea absolut convergentă și derivînd formal în raport cu x sub semnul integral; de aceea funcția $\varphi(x)$ este indefinit deri-

vabilă și

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-is)^q\psi(s)\,e^{-isx}\,ds.$$

Fie $|x| > a$; să dăm un anumit $t > 0$ și definim pe τ prin condiția $x\tau = -t|x|$. Utilizînd inegalitatea (5) pentru $q = 0$ și $q \leqslant 2$, obținem

$$|\psi(s)| \leqslant e^{a|\tau|}\min\left\{C_0, \frac{C_0}{|s|^2}\right\} \leqslant C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2} \leqslant C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2};$$

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int_{-\infty}^{\infty}C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2}\,d\sigma = C'e^{-t|x|+at} = C'e^{t(a-|x|)}.$$

Cum C' nu depinde de t, făcînd pe t să tindă la ∞, obținem că $\varphi(x) = 0$. Astfel funcția $\varphi(x)$ are suportul conținut în mulțimea $|x| \leqslant a$ și deci funcția $\varphi(x)$ verifică toate condițiile cerute. În virtutea teoremei cunoscute privind integrala Fourier*, transformata sa Fourier coincide cu funcția $\psi(\sigma)$, adică ceea ce trebuia arătat.

Să mai notăm o formulă utilă:

$$FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x). \tag{6}$$

Într-adevăr, dacă $F[\varphi(x)] = \psi(\sigma)$, avem

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int\psi(\sigma)e^{-ix\sigma}\,d\sigma = \varphi(x),$$

de unde

$$\int\psi(\sigma)\,e^{ix\sigma}\,d\sigma = F[(\psi(\sigma)] = 2\pi\varphi(-x).$$

1.2. **Spațiul Z.** Studiul transformării Fourier pe spațiul K, început în punctul precedent, conduce în mod natural la următoarea definiție. Introducem *spațiul Z* al tuturor funcțiilor întregi $\psi(s)$ ce verifică inegalitățile

$$|s|^q|\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

* v. V. I. Smirnov, Curs, t. II, pct. 160, pag. 506.

(constantele a și C_q depinzînd de funcția ψ), cu definiția evidentă a operațiilor liniare fundamentale — adunarea și înmulțirea cu un număr.

După cum s-a arătat la § 1.1, *transformata Fourier stabilește o corespondență biunivocă între spațiile K și Z*. Este evident că această corespondență este un izomorfism de spații vectoriale.

Rezultă de aici că la fiecare operator liniar definit în spațiul K corespunde un anumit operator liniar „dual", definit în spațiul Z. Astfel, de exemplu, operatorului de derivare din K îi corespunde, ținînd seama de formula (3) pct. 1.1., operatorul de înmulțire cu $-is$ în spațiul Z. Pe de altă parte, formula

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} ix\,e^{isx}\varphi(x)\,dx$$

arată că operatorului de înmulțire cu ix în spațiul K îi corespunde operatorul de derivare în spațiul Z; iterînd acest operator, ajungem la formula, valabilă pentru orice $q = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^q}{ds^q}F[\varphi] = F[(ix)^q\varphi(x)], \quad q = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Din existența membrului drept rezultă existența celui stîng; de aceea, în spațiul Z funcțiile $\psi(s)$ se pot deriva de ori de cîte ori, fără a părăsi spațiul Z. Se poate scrie și o formulă ceva mai generală.

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[\varphi] = F[P(ix)\varphi(x)], \tag{3}$$

unde $P(t)$ este un polinom arbitrar cu coeficienți constanți.

Operatorului de translație $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$ din spațiul K îi corespunde operatorul de înmulțire cu e^{ish} în spațiul Z; într-adevăr

$$F[\varphi(x-h)] = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}\varphi(x-h)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(y+h)}\varphi(y)dy = e^{i\sigma h}F[\varphi(x)].$$

Reciproc, operatorului de înmulțire cu e^{ixh} (pentru orice h, eventual complex) îi corespunde în spațiul Z operatorul de translație:

$$F[e^{ix\sigma}\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty}e^{ixh}e^{i\sigma x}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{ix(h+\sigma)}\varphi(x)\,dx = \psi(\sigma+h).$$

Vedem astfel că spațiul Z conține odată cu o funcție $\psi(s)$ și toate translatatele sale.

Se poate introduce în spațiul Z și operația de trecere la limită, convenind a zice că șirul de funcții $\psi_\nu(s)$ tinde către 0 dacă șirul imaginilor respective $\varphi_\nu(x)$ tinde către zero în K. Putem defini de altfel și direct convergența în Z. Anume șirul $\psi_\nu(x)$ tinde către zero în Z dacă, în primul rînd, sînt îndeplinite inegalitățile

$$|s^q\psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|},$$

cu constante C_q și a nedepinzînd de ν, și dacă aceste funcții converg uniform către zero pe orice interval al axei σ.

Să remarcăm că dezvoltarea în serie Taylor

$$\sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = \psi(s+h)$$

pentru orice h fixat (h complex) are loc sensul convergenței de mai sus; aceasta rezultă din validitatea formulei duale

$$\sum_{q=0}^{\infty} (ix)^q \frac{h^q}{q!}\varphi(x) = e^{ixh}\varphi(x)$$

în sensul convergenței din spațiul K.

1.3. **Cazul mai multor variabile.** Raționamentele precedente ar fi putut fi făcute aproape fără modificări în cazul a n variabile. Transformata Fourier a unei funcții test $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este definită de formula

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i(x_1\sigma_1+\ldots+x_n\sigma_n)}dx_1 \ldots dx_n,$$

sau, pe scurt

$$\psi(\sigma) = \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\, e^{i(x,\sigma)}dx, \tag{1}$$

unde am notat cu (x, σ) produsul scalar $x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n$. Datorită faptului că funcția $\varphi(x)$ este cu suport compact, funcția ψ poate fi

definită și pentru valorile complexe ale argumentului $s=(s_1, \ldots, s_n) = (\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n)$:

$$\psi(s) = \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\, e^{i(x,s)}dx. \tag{2}$$

Funcția obținută $\psi(s)$, definită acum pe spațiul $\mathbf{C}^n$, este continuă și analitică în fiecare din argumentele sale $s_1, \ldots, s_n$. Dacă funcția $\varphi(x)$ se anulează identic pentru $|x_k| > a_k (k = 1, 2, \ldots n)$, atunci transformata sa Fourier $\psi(s)$ verifică evaluarea

$$|s_1^{q_1}\ldots s_n^{q_n}\psi(\sigma_1+i\tau_1, \ldots \sigma_n+i\tau_n)| \leqslant C_q \exp(a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|). \tag{3}$$

Reciproc, orice funcție întreagă $\psi(s_1, \ldots, s_n)$, verificînd inegalitățile (3), este transformata Fourier a funcției test $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ cu suportul conținut în $|x_k| \leqslant a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ (demonstrația se face exact ca în cazul unei singure variabile). Au loc formule asemănătoare formulelor (4) § 1.1 și (3) § 1.2.

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right)F[\varphi] = F[P(ix_1, \ldots, ix_n)\varphi(x)], \tag{4}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right] = P(-is_1, \ldots, -is_n)\, F[\varphi], \tag{5}$$

P fiind un polinom arbitrar cu coeficienți constanți.

Spațiul tuturor funcțiilor întregi $\psi(s)$, verificînd inegalitățile de forma (3), în care sînt definite în mod natural operațiile liniare de adunare și de înmulțire cu un număr, va fi notat cu Z. Transformata Fourier stabilește un izomorfism de spații vectoriale între spațiile K și Z. Convergența în spațiul Z se definește astfel: șirul $\psi_\nu(s)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) se zice că *converge către zero*, dacă șirul funcțiilor test corespunzătoare $\varphi_\nu(x)$ converge către zero în spațiul K. Direct, această convergență se definește astfel: inegalitățile

$$|s^q\psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1|+\ldots+a_n\tau_n}$$

sînt verificate, constantele C_q și a nedepinzînd de ν, iar funcțiile $\psi_\nu(\sigma)$ converg uniform către zero pe orice compact din spațiul $\mathbf{R}^n$.

1.4. **Funcţionale pe spaţiul Z.** Pe spaţiul Z, ca şi pe spaţiul K se pot considera funcţionale liniare continue pe care le vom numi funcţii generalizate. Să considerăm din nou cazul unei singure variabile. Vom numi în acest caz *funcţională regulată* o funcţională dată de o expresie de forma

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\sigma)\psi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

Funcţionalele de forma

$$(g, \psi) = \int_L g(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

unde L este un anumit drum le vom numi *funcţionale analitice* *. Astfel, „funcţia δ", $(\delta(s - s_0), \psi) = \psi(s_0)$ (s_0 fiind un număr complex arbitrar) nu este o funcţionala regulată ci una analitică, căci în virtutea formulei lui Cauchy,

$$\psi(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(s)\,\mathrm{d}s}{s - s_0},$$

L fiind orice contur ce înconjoară punctul s_0; deci $\delta(s - s_0)$ este funcţionala analitică ce corespunde funcţiei $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{s - s_0}$.

Mulţimea tuturor funcţionalelor liniare şi continue pe spaţiu Z o vom nota cu Z'. Pe aceste funcţionale, pe care le vom numi funcţii generalizate, se pot efectua operaţii similare celor ce au fost introduse pentru distribuţii. Este limpede că definiţia adunării, înmulţirii cu un număr, şi chiar trecerea la limită nu aduc nimic nou. Înmulţirea cu o funcţie $h(s)$ este definită formal prin

$$(\bar{h}(s)\, g, \psi) = (g, h\psi), \tag{3}$$

dar mulţimea funcţiilor $h(s)$ este mult mai mică. Într-adevăr, pentru ca această definiţie să aibă sens, trebuie ca produsul funcţiei $\bar{h}(s)$ cu orice funcţie test $\psi(s)$ să fie iarăşi o funcţie test. Funcţiile $h(s)$ având

* Termenul folosit aici de autori, de funcţională analitică, nu este cel actualmente acceptat. În general se înţelege prin funcţională analitică o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul funcţiilor analitice, acesta fiind înzestrat cu topologia sa naturală. Vom utiliza în continuare terminologia autorilor (Nota trad.).

această proprietate le vom numi *multiplicatori* în Z. Funcţia $h(s)$ are această proprietate dacă este analitică, întreagă şi verifică o evaluare de forma $|h(s)| \leqslant Ce^{b|\tau|}\,(1 + |s|)^q$ pentru anumiţi b, q şi C.

Derivata funcţionalei $g \in Z'$ este definită prin formula

$$\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}, \psi\right) = -\left(g, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right);$$

ea se poate defini şi ca limita raportului $\dfrac{g(s + h) - g(s)}{h}$.

Exact ca în cazul spaţiului K', funcţionalele $g \in Z'$ pot fi derivate de ori de cîte ori. Dar, spre deosebire de distribuţii, funcţionalele $g \in Z'$ sînt nu numai infinit derivabile ci chiar analitice; aceasta înseamnă că pentru orice $g \in Z'$ avem

$$\sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = g(s + h),$$

unde seria din membrul stîng converge în spaţiul Z' iar $g(s + h)$ este translatata prin h a lui $g(s)$.

Într-adevăr, pentru orice $\psi(s) \in Z$

$$\left(g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \psi(s)\right) = \left(g(s), \frac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)\right)$$

şi seria $\sum \dfrac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)$ converge în spaţiul Z, aşa cum am mai remarcat, către funcţia $\psi(s - h)$; prin urmare:

$$\left(\sum g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \psi(s)\right) = (g(s), \psi(s - h)) = (g(s + h), \psi(s)),$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Să remarcăm, în special, dezvoltarea

$$\delta(s + h) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \tag{5}$$

valabilă pentru orice h (complex); distribuția δ translatată se definește prin

$$(6) \qquad (\delta(s+h),\ \psi(s)) = (\delta(s),\ \psi(s-h)) = \psi(-h).$$

În cazul mai multor variabile, spațiul Z' se definește asemănător. În el, ca mai sus, se definește adunarea, înmulțirea cu un număr, trecerea la limită și înmulțirea cu o funcție $\bar{h}(s) = \bar{h}(s_1, \ldots, s_n)$. Funcția $h(s)$ se va numi multiplicator în Z dacă este continuă, analitică (adică analitică în fiecare variabilă s_l pentru $s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_n$ fixați) și dacă

$$|h(s)| \leqslant C \exp(b_1|\tau_1| + \ldots + b_n|\tau_n|)(1+|s_1|)^{q_1} \ldots (1+|s_n|)^{q_n}.$$

Derivatele funcționalei $g \in Z'$ se definesc exact ca mai înainte. Fiecare funcțională din Z' este nu numai infinit derivabilă dar și analitică, adică poate fi dezvoltată în serie Taylor, ce converge în sensul convergenței din Z'.

1.5. **Funcționale analitice.** În punctul precedent am numit o funcțională g pe spațiul Z analitică dacă ea se poate reprezenta sub forma

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\ \psi(s)\, ds,$$

$g(s)$ fiind o anumită funcție, iar Γ un contur în planul complex (pentru început considerăm cazul unei singure variabile independente). Conform regulilor generale ale teoriei funcțiilor analitice, dacă $g(s)$ este analitică atunci conturul Γ se poate deforma continuu, fără a se modifica mărimea (g, ψ); pentru aceasta trebuie ca ambele capete ale conturului să rămînă neschimbate și conturul să nu treacă prin puncte singulare ale funcției $g(s)$. Astfel, funcționala unitate

$$1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \psi(s)\, ds$$

poate fi dată nu numai prin integrarea de-a lungul axei reale, ci și cu ajutorul integrării de-a lungul oricărui contur mergînd de la $-\infty$ la $+\infty$ în limitele unei anumite benzi $|Ims| \leqslant C$, de pildă de-a lungul oricărei drepte paralele axei reale. Toate aceste contururi, de-a lungul cărora integrala unei funcții test oarecare ψ nu se schimbă

le vom numi *echivalente*. Dacă integrăm pe 1 de-a lungul unui alt contur Γ' vom obține o altă funcțională. De exemplu, dacă Γ este un contur închis sau o buclă închisă, situată în banda $|Ims| \leqslant C$ și mergînd de la $-\infty$ la $-\infty$ (sau de la $+\infty$ la $+\infty$) se va obține, evident, funcționala identic nulă. Astfel de contururi, de-a lungul cărora integrala oricărei funcții test este nulă se vor numi *contururi nule* sau *contururi închise generalizate*.

Fie funcția $g(s) = \frac{1}{s}$. Cu ajutorul ei se pot considera două funcționale analitice diferite:

$$(g_{+1}\psi) = \int_{-\infty+ai}^{+\infty+ai} \frac{\psi(s)}{s}\, ds \quad (a>0),$$

$$(g_{-1}\psi) = \int_{-\infty-ai}^{+\infty-ai} \frac{\psi(s)}{s}\, ds \quad (a>0).$$

În ambele cazuri integrarea se face de-a lungul unei drepte paralele axei reale și situată, în primul caz, în semiplanul superior, iar în al doilea — în cel inferior.

Amîndouă aceste funcționale verifică ecuația

$$s\bar{g} = 1.$$

Diferența acestor funcționale se poate aduce la forma

$$(g_+ - g_-,\ \psi) = \int_{|s|=1} \frac{\psi(s)}{s}\, ds$$

integrînd de-a lungul circonferinței unitate în sens orar. Din formula lui Cauchy

$$(g_+ - g_-, \psi) = -2\,i\psi(0),$$

de unde

$$g_+ - g_- = -2i\delta(s).$$

Funcționala $g_0 = g_+ - g_-$ verifică, evident, ecuația

$$\bar{s}g_0 = 0.$$

Să considerăm o funcție rațională arbitrară

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Rădăcinile distincte ale polinomului $Q(s)$ le notăm $s_1, \ldots, s_n$. Integrarea pe orice contur Γ, echivalent axei reale, conduce la funcționala

$$(\bar{g}, \psi)_1^1 = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\,ds,$$

ce depinde în general de conturul Γ; orice funcțională de acest fel verifică ecuația

$$Qg = P.$$

Integrarea pe orice contur nul Γ_0 conduce la funcționala

$$(\bar{g}_0, \psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\,ds,$$

care iarăși depinde de conturul Γ_0. Toate aceste funcționale verifică ecuația

$$Qg_0 = 0.$$

De pildă, dacă Γ_0 este un contur ce înconjoară, în sens direct o rădăcină simplă s_1 a polinomului $Q(s)$, atunci

$$(\bar{g}_0, \psi)_1^1 = \int_{\Gamma_0} g(s)\psi(s)\,ds = 2\pi i \operatorname*{Res}_{s=s_1}[g(s)\psi(s)] = C\psi(s_1)$$

și deci $g_0 = C\delta(s - s_1)$. Dacă Γ_0 înconjoară o rădăcină s_1 de multiplicitate k a polinomului $Q(s)$ atunci

$$(g_0, \psi) = 2i\pi \operatorname*{Res}_{s=s_1}[g(s)\psi(s)] = \frac{2\pi i}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s - s_1)^k g(s)\psi(s)_0]_{s=s_1}.$$

Fie funcționalele analitice legate de funcțiile

$$g(s) = e^{s^n}$$

Din egalitatea

$$|e^{s^n}| = e^{Re\, s^n} = e^{|s|^n \cos n\theta}, \quad \text{cu } \theta = \arg s$$

rezultă că planul variabilei complexe s se poate descompune în $2n$ sectoare, de deschidere $\frac{\pi}{n}$, fiecare, astfel ca în aceste sectoare funcția e^{s^n} alternativ crește exponențial, și apoi descrește exponențial. Sectoarele de primul tip le vom numi „creste", cele de al doilea tip „văi". Fie un drum arbitrar Γ_k care pleacă de la ∞ din prima vale și ajunge la ∞ în cea de a k — a ($k = 2, \ldots, n$). Putem considera funcționala

$$(F_k, \psi) = \int_{\Gamma_k} e^{s^n}\psi(s)\,ds,$$

iar integrala converge, căci e^{s^n} descrește exponențial în ambele văi, iar funcția test $\psi(s)$ crește încet.

Obținem astfel $n - 1$ funcționale distincte, pe care le vom nota respectiv cu $e_1^{s^n}, \ldots, e_{n-1}^{s^n}$. Ele toate verifică o anume ecuație diferențială de ordinul întîi, care se obține ușor astfel. Derivăm funcționala $e_k^{s^n}$:

$$\left(\frac{d}{ds}e_k^{s^n}, \psi\right) = \left(e_k^{s^n}, -\frac{d\psi}{ds}\right) = -\int_{\Gamma_k} e^{s^n}\frac{d\psi}{ds}\,ds.$$

Această expresie se integrează prin părți (termenul integrat dispare datorită descreșterii rapide a funcției e^{s^n} în văi) și se obține:

$$\left(\frac{d}{ds}e_k^{s^n}, \psi\right) = \int_{\Gamma_k} ns^{n-1}e_k^{s^n}\psi(s)\,ds = (ns^{n-1}e_k^{s^n}, \psi).$$

Rezultă deci că funcționalele $e_k^{s^n}$ verifică ecuația

$$\frac{d}{ds}e_k^{s^n} = ns^{n-1}e_k^{s^n}.$$

Se vede de aici că în *spațiul funcționalelor pe spațiul Z ecuația liniară omogenă de ordinul I are oricît de multe soluții liniare independente.*

Un interes deosebit îl prezintă și funcționalele analitice de mai multe variabile $s_1, \ldots, s_n$. În acest caz funcționalele analitice sînt date de

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\, ds,$$

Γ fiind o hipersuprafață (deci de dimensiune $2n - 1$) în spațiul $2n$ dimensional a n variabile complexe $s_1, \ldots, s_n$.

Din teorema lui Poincaré *, ce generalizează formula integrală a lui Cauchy la cazul funcțiilor analitice de n variabile, hipersuprafața Γ poate fi deformată arbitrar, atît timp cît frontiera sa nu se modifică și, prin deformare, Γ nu trece prin singularități ale funcției $g(s)$.

Vom numi suprafața Γ echivalentă cu spațiul real, dacă pentru orice funcție test

$$\int_\Gamma \psi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma$$

(integrala din membrul drept fiind calculată pe spațiul real $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$). Un exemplu de hipersuprafață echivalentă cu spațiul real îl constituie „scara lui Hörmander" care este locul geometric al punctelor $s_1, \ldots$ $\ldots, s_n$ în care $s_2, \ldots, s_n$ sînt reali, iar s_1 descrie (în planul s_1) un contur echivalent cu axa reală (din planul s_1). Funcționala g definită de formula

$$(g, \psi) = \int_\Gamma \frac{1}{P(s)} \psi(s)\, ds,$$

Γ fiind o scară a lui Hörmander pe care polinomul (sau funcția în treagă) $P(s)$ nu se anulează, verifică ecuația

$$Pg = 1. \tag{1}$$

Se poate arăta că pentru orice polinom $P(s)$ se poate construi o astfel de scară și că deci ecuația (1) are întotdeauna o soluție în spațiul Z'.

Vom numi o suprafață Γ *nulă*, sau *închisă în sens generalizat* dacă pentru orice funcție test $\psi(s)$

$$\int_\Gamma \psi(s) ds = 0.$$

* v. B. A. Fuks, *Teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe* (în lb. rusă).

Un exemplu de suprafață nulă îl poate constitui varietatea produs dintre un contur nul în spațiul s_1 cu o suprafață oarecare în spațiul celorlalte variabile.

Pentru orice polinom $P(s)$ pentru care $\frac{1}{P(s)}$ este mărginit pe conturul nul Γ se definește funcționala

$$(g, \psi) = \int_\Gamma \frac{1}{P(s)} \psi(s)\, ds;$$

ea este o soluție a ecuației

$$Pg = 0. \tag{2}$$

Observație. Transformînd Fourier ecuațiile (1) și (2) (v. mai departe § 2) obținem soluția ecuațiilor

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) f = \delta(x) \tag{3}$$

și

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0, \tag{4}$$

unde prin $i \frac{\partial}{\partial x}$ trebuie înțeles $\left(i \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Pe această cale se poate arăta că orice ecuație liniară cu derivate parțiale cu coeficienți constanți are o soluție fundamentală.

Vom utiliza în cele ce urmează aceste considerații simple pentru a construi efectiv soluții pentru astfel de ecuații.

1.6. Transformarea Fourier în spațiul S. Am introdus la sfîrșitul § 1, cap. I, spațiul S al funcțiilor indefinit derivabile $\varphi(x)$, ce verifică inegalitățile

$$|x^k D^q \varphi(x)| \leqslant C_{kq}. \tag{1}$$

Să găsim acum clasa funcțiilor ce sînt transformate Fourier ale funcțiilor din spațiul S. Orice funcție $\varphi(x) \in S$ are evident o transformată Fourier clasică

$$\psi(\sigma) = \int \varphi(x)\, e^{i(x,\sigma)}\, dx,$$

și funcția $\psi(\sigma)$ este indefinit derivabilă din cauza convergenței absolute a integralelor

$$D^q\psi(\sigma) = \int (ix)^q \varphi(x)\, e^{i(x,\,\sigma)}\, dx.$$

Funcția $(ix)^q\varphi(x)$ fiind indefinit derivabilă odată cu $\varphi(x)$ și toate derivatele sale fiind absolut integrabile, funcția $D^q\psi(\sigma)$ va converge către zero mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|\sigma|}$. Prin urmare, funcția $\psi(\sigma)$, ca funcție de variabilele $\sigma = (\sigma_1 \ldots, \sigma_n)$ are aceleași proprietăți ca funcția $\varphi(x)$ ca funcție de variabila x. Vedem deci că transformarea Fourier duce spațiul S în el însuși. Mai mult, cum aceleași considerații se pot face și pentru transformarea Fourier inversă, rezultă că transformarea Fourier transformă pe S în el însuși, adică orice funcție $\psi(\sigma) \in S$ este deci imaginea prin transformarea Fourier a unei funcții din spațiul S. Se poate arăta că orice șir de funcții $\varphi_\nu(x)$ ce converge în S se transformă prin transformarea Fourier într-un șir $\psi_\nu(\sigma)$ ce converge în S.

Rezultă în particular, din cele de mai sus, că orice element $\psi(\sigma)$ al spațiului Z aparține și lui S (acest lucru se poate obține și direct: din definiția spațiului Z rezultă că orice funcție $\psi(\sigma) \in Z$ este indefinit derivabilă și converge către zero pentru $|\sigma| \to \infty$ mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|\sigma|}$; apoi, aplicînd la calculul derivatelor formula integrală a lui Cauchy, se obține că aceeași proprietate o au derivatele de orice ordin ale lui $\psi(\sigma)$). În plus, din cele spuse rezultă că dacă un șir de funcții $\psi_\nu(\sigma)$ din Z converge în Z, el va converge și în sensul convergenței din S. În sfîrșit spațiul K fiind dens în spațiul S, imaginea sa — spațiul Z — va fi dens în S, deci orice funcție $\psi(\sigma) \in S$ se poate obține ca limită (în sensul convergenței din S) a unui șir de funcții $\psi_\nu(\sigma) \in Z$.

§ 2. Transformarea Fourier a distribuțiilor. Cazul unei singure variabile

2.1. **Definiție.** Din cauză că există un izomorfism de spații vectoriale între spațiile K și Z, se poate găsi de asemenea un izomorfism între dualele acestor spații. Vom găsi acest izomorfism astfel încît

aplicat unei funcționale regulate ce corespunde unei funcții absolut integrabile, să dăm peste funcționala regulată ce corespunde transformatei Fourier clasice a funcției respective.

Vom începe prin a considera cazul unei singure variabile.

Fie $f(x)$ o funcție absolut integrabilă și $g(\sigma)$ transformata sa Fourier. Atunci, dacă $\varphi(x)$ este o funcție test arbitrară și $\psi(\sigma)$ transformata sa Fourier, vom avea relația

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, e^{-ix\sigma}\, d\sigma \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)\, e^{ix\sigma}} dx \right\} d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\sigma)}\psi(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}(g,\, \psi),$$

care se numește de obicei *egalitatea lui Parseval*; ea rămîne adevărată și atunci cînd $f(x)$ și $\varphi(x)$, și prin urmare și transformatele lor Fourier, $g(\sigma)$ și $\psi(\sigma)$ sînt doar de pătrat integrabil pe axa reală. Egalitatea lui Parseval ne spune că $g(\sigma)$, considerată ca distribuție acționează pe funcția test conform formulei

$$(g,\, \psi) = 2\pi(f,\, \varphi), \tag{1}$$

sub această formă ea poate fi folosită pentru a defini funcționala g pe spațiul Z, pentru orice distribuție f. Vom numi funcționala g, definită de egalitatea (1) *transformata Fourier a funcționalei* f, și o vom nota $F[f]$ sau $\tilde{f}$.

Subliniem că funcționala $F[f]$ nu acționează pe spațiul K ci pe spațiul Z.

Pentru transformatele Fourier ale distribuțiilor se păstrează formulele de derivare ale transformatelor Fourier uzuale:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(ix)f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = P(-is)\,F[f], \tag{3}$$

astfel că, în particular, înmulțirii cu ix în spațiul K' îi corespunde derivarea în spațiul Z', iar derivării în spațiul K' îi corespunde înmulțirea cu $-is$ în spațiul Z'.

Pentru demonstrație este suficient a considera cazul $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Avem în acest caz

$$(F[\mathrm{i}xf],\ F[\varphi]) = 2\pi(\mathrm{i}xf,\ \varphi) = 2\pi(f,\ -\mathrm{i}x\varphi) =$$

$$= (F[f],\ F[-\mathrm{i}x\varphi]) = \left(F[f],\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[\varphi]\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[f],\ F[\varphi]\right),$$

ceea ce dă tocmai formula (2); analog se stabilește (3).

Operatorul invers F^{-1}, este definit pe spațiul Z' și duce funcționala g în funcționala f prin aceeași formulă (1) (citită însă de la dreapta la stînga), astfel încît

$$(4)\qquad \begin{cases} F^{-1}[F[f]] = f,\ F[F^{-1}[g]] = g, \\ (F^{-1}[g],\ \varphi) = \dfrac{1}{2\pi}(g,\ F[\varphi]). \end{cases}$$

Să mai observăm că formula $FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x)$ (§ 1.1, formula (6)) se transportă ușor la distribuții. Într-adevăr, pentru funcția φ aparținînd spațiului S:

$$(FF[f],\ FF[\varphi(x)]) = 2\pi(F[f],\ F[\varphi(x)]) = (2\pi)^2(f,\ \varphi(x)).$$

Dar în locul lui $FF[\varphi(x)]$ putem scrie $2\pi\varphi(-x)$. Simplificînd cu 2π și înlocuind pe x cu $-x$ obținem:

$$(FF[f],\ \varphi(x)) = (2\pi f,\ \varphi(-x)),$$

adică

$$(5)\qquad FF[f(x)] = 2\pi f(-x),$$

ceea ce trebuia arătat.

2.2. **Exemple.** 1. Să găsim pe $F[\delta]$. Conform definiției

$$(\tilde{\delta},\ \tilde{\varphi}) = 2\pi(\delta,\ \varphi) = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = (1,\ \psi),$$

deci

$$(1)\qquad F[\delta] = \tilde{\delta} = 1,\ F^{-1}[1] = \delta.$$

2. Analog să calculăm pe $F[1]$:

$$(\tilde{1},\ \tilde{\varphi}) = 2\pi(1,\ \varphi) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot 0}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\psi(0) = 2\pi(\delta,\ \psi),$$

deci

$$(2)\qquad F[1] = \tilde{1} = 2\pi\delta,\ F^{-1}[\delta] = \frac{1}{2\pi}.$$

3. Transformata Fourier a unui polinom. Utilizînd formule (2)—(3) de la § 2.1, găsim

$$(3)\qquad F[P(x)] = F[P(x)\cdot 1] = P\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\tilde{1} = 2\pi P\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\delta(s),$$

$$(4)\qquad F\left[P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\delta(x)\right] = P(-is)\tilde{\delta} = P(-is)\cdot 1 = P(-is).$$

În particular

$$(5)\qquad \begin{cases} F[\delta^{(2m)}(x)] = (-1)^m s^{2m}, \\ F[\delta^{(2m+1)}(x)] = (-1)^{m+1}\mathrm{i}s^{2m+1}. \end{cases}$$

4. **Ecuația diferențială de ordinul $(n-1)$**

$$(6)\qquad ny^{(n-1)}(x) = xy(x)$$

devine, după aplicarea transformării Fourier, o ecuație de ordinul 1

$$(7)\qquad n(-\mathrm{i}\sigma)^{n-1}u(\sigma) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\ (u = \tilde{y}).$$

Cum ecuația de ordinul $(n-1)$, (6) are $(n-1)$ soluții (uzuale), liniar independente, rezultă că ecuația (7) de ordinul 1 are $n-1$ soluții liniar independente în spațiul funcțiilor generalizate pe Z. Am considerat deja aceste soluții în § 1.5.

5. Transformata Fourier a funcției exponențiale e^{bx}.
Folosim faptul că seria

$$e^{bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n x^n}{n!},$$

converge în sensul convergenței spațiului K'; aceasta permite calculul transformatei $\widetilde{e^{bx}}$ prin aplicarea operatorului F termen cu termen. Obținem (v. formulele (5) — (6), § 1.4):

$$(8) \qquad \widetilde{e^{bx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \widetilde{x^n} = 2\pi \sum_{0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \left(-i \frac{d}{ds}\right)^n \delta(s) = 2\pi\delta(s - ib).$$

Formula (8) permite să obținem ușor transformatele Fourier ale funcțiilor $\sin bx$, $\cos bx$, $\operatorname{sh} bx$, $\operatorname{ch} bx$:

$$(9) \qquad F[\sin bx] = F\left[\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right] = i\pi[\delta(s-b) - \delta(s+b)],$$

$$(10) \qquad F[\cos bx] = F\left[\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-b) + \delta(s+b)],$$

$$(11) \qquad F[\operatorname{sh} bx] = F\left[\frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-ib) - \delta(s+ib)],$$

$$(12) \qquad F[\operatorname{ch} bx] = F\left[\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-ib) + \delta(s+ib)].$$

6. Transformata Fourier a distribuțiilor ce se prelungesc la spațiul S.
Să presupunem că funcționala f, definită inițial pe spațiul K poate fi prelungită prin continuitate la spațiul S (v. cap. I, § 1.10). Vom arăta că transformata sa Fourier $g = \tilde{f}$ se prelungește de asemenea (de la spațiul Z) pe spațiul S.

Într-adevăr, formula

$$(13) \qquad (g, \psi) = 2\pi(f, \varphi), \quad \psi = \bar{\varphi},$$

definește funcționala g pentru toate acele funcții ψ care sînt transformate Fourier de funcții φ; cum φ parcurge întreg spațiul S, funcția ψ parcurge de asemenea întreg spațiul S. De asemenea, cum din convergența către zero a funcțiilor $\psi_\nu(\sigma) \in S$ rezultă convergența către zero a imaginilor lor inverse $\varphi_\nu(x) \in S$ (ambele în sensul convergenței în S), obținem că funcționala g este continuă pe S. Într-adevăr, dacă $\psi_\nu(\sigma) \to 0$, atunci $(g, \psi_\nu) = 2\pi(f, \varphi_\nu) \to 0$.

În acest mod formula (13) definește o funcțională continuă g pe S. Dar pentru $\psi \in Z$ ea coincide desigur cu transformata Fourier $\tilde{f}$ a funcționalei f, acționînd pe spațiul K. Astfel $\tilde{f}$ se prelungește de la Z la S, așa cum se afirmase.

În particular, transformatele Fourier ale funcțiilor periodice, ale distribuțiilor cu suport compact, ale tuturor funcțiilor uzuale cu creștere polinomială pot fi considerate funcționale pe S. Aceasta este cazul, de exemplu, al funcțiilor generalizate $\widetilde{x_+^\lambda}$, $\widetilde{x_-^\lambda}$, $\widetilde{|x|^\lambda}$ și $\widetilde{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}$, pe care le vom considera în mod amănunțit în punctul 2.3.

7. *Transformatele Fourier ale funcțiilor periodice.*
Orice funcție $f(x)$, periodică (de perioadă 2π), local integrabilă, se poate reprezenta, după cum s-a văzut în cap. I, § 2.4 sub forma unei serii Fourier

$$(14) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

ce converge în sensul distribuțiilor (și chiar în spațiul S').

Luînd în egalitatea (14) transformatele Fourier termen cu termen (ceea ce este permis avînd în vedere continuitatea sa) și utilizînd rezultatul de la exemplul 5, găsim:

$$(15) \qquad \widetilde{f(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta(s + n).$$

Astfel, funcționala $f(x)$, considerată ca element al spațiului S' are suportul concentrat în punctele $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2.3. Transformatele Fourier ale distribuțiilor x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \times \operatorname{sgn} x$. Să calculăm transformata Fourier a distribuției x_+^λ. Ne mărginim la început la valorile λ verificînd $-1 < Re\lambda < 0$.

Considerăm expresia

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = \int_0^\infty x^\lambda e^{i\sigma x} e^{-\tau x}\, dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{isx}\, dx \tag{1}$$

pentru $\tau = Ims > 0$, deci astfel ca $0 < \arg s < \pi$. Această integrală converge. Atunci cînd $\tau \to +0$, $x_+^\lambda e^{-\tau x}$ converge către x_+^λ în sensul distribuţiilor şi deci transformata Fourier a lui $x_+^\lambda\ e^{-\tau x}$ converge către transformata Fourier a lui x_+^λ.

Vom calcula integrala (1) cu ajutorul substituţiei

$$isx = -\xi,\ isdx = -d\xi,\ x = -\frac{\xi}{is},\ dx = -\frac{d\xi}{is}.$$

Obţinem astfel:

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{s}\right)^{\lambda+1} \int_L \xi^\lambda e^{-\xi}\, d\xi,$$

drumul de integrare L fiind o rază ce pleacă din 0 la ∞ de argument $\arg\xi = \arg s - \frac{\pi}{2}$. Prin urmare,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\xi < \frac{\pi}{2}.$$

Dar în semiplanul drept $e^{-\xi}$ descreşte exponenţial. Utilizînd formula lui Cauchy obţinem că ultima integrală este egală cu integrala pe semiaxa $\xi > 0$, adică

$$\int_0^\infty \xi^\lambda e^{-\xi} d\xi = \Gamma(\lambda+1),$$

şi deci

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma + i\tau)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1).$$

Ipoteza $-1 < Re\lambda < 0$ atrage şi

$$-1 < Re(-\lambda - 1) < 0.$$

Trecînd la limită pentru $\tau \to +0$ obţinem (v. cap. I, § 3.6)

$$F[x_+^\lambda] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma + i0)^{-\lambda-1}. \tag{2}$$

Din unicitatea prelungirii analitice * această formulă va rezulta adevărată pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$.

Dacă împărţim în ambii membri cu $\Gamma(\lambda+1)$, obţinem atît în dreapta cît şi în stînga funcţiile întregi de λ, şi prin urmare, pentru toate valorile lui λ

$$F\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma + i0)^{-\lambda-1}. \tag{3}$$

Putem să introducem în membrul drept expresia distribuţiei $(\sigma + i0)^{-\lambda-1}$ (v. cap. I, § 3). Obţinem atunci pentru $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$F[x_+^\lambda] = i\Gamma(\lambda+1)\,[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma^{-\lambda-1}]; \tag{4}$$

pentru $\lambda = n (n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$F[x_+^n] = i^{n+1}[n_0'\sigma^{-n-1} + (-1)^{n+1}\, i\pi\delta^{(n)}(\sigma)]. \tag{5}$$

În particular

$$F[x_+^0] \equiv F(\theta(x)) = i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma), \tag{6}$$

$$F[x_+^1] \equiv F[x_+] = -\sigma^{-2} - i\pi\delta'(\sigma) \tag{7}$$

ş.a.m.d.

În mod asemănător se poate calcula transformata Fourier a lui x_-^λ. Pentru aceasta este necesar pentru început a presupune că $-1 < Re\lambda < 0$, a calcula $F[x^\lambda e^{-\tau x}]$ cu $\tau < 0$ şi apoi a trece la limită pen-

* Aici (şi adesea în continuare) se vor folosi următoarele consideraţii simple. Fie f_λ şi g_λ distribuţii ce depind analitic de λ în domeniul G, şi să presupunem că este cunoscut faptul că într-un domeniu mai mic $G_1 \subset G$ distribuţia g_λ este transformata Fourier a distribuţiei f_λ: $g_\lambda = \tilde{f}_\lambda$. Aceasta înseamnă în primul rînd că funcţiile numerice (f_λ, φ) şi (g_λ, ψ) cu φ şi ψ funcţii test, sînt analitice în domeniul G, iar în al doilea rînd că în domeniul G_1, dacă $\psi = \tilde{\varphi}$, funcţiile (f_λ, φ) şi (g_λ, ψ) sînt legate de relaţia $(g_\lambda, \psi) = 2\pi(f_\lambda, \varphi)$(+). Unicitatea prelungirii analitice asigură valabilitatea relaţiei (+) în întreg domeniul G şi prin urmare în G, distribuţia g_λ este transformata Fourier a distribuţiei f_λ.

tru $\tau \to -0$. Obţinem astfel:

$$F[x^\lambda e^{-\tau x}] = \int_{-\infty}^{0} |x^\lambda| e^{i\sigma x} e^{-\tau x}\,dx = \int_0^\infty t^\lambda e^{-ist}\,dt = \left(-\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1).$$

Rezultă deci că pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$F[x_-^\lambda] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma - i0)^{-\lambda-1}. \tag{8}$$

şi pentru orice λ

$$F\left[\frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma - i0)^{-\lambda-1}. \tag{9}$$

Pentru $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, introducînd expresia lui $(\sigma - i0)^{-\lambda-1}$ găsim:

$$F[x^\lambda] = i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}]. \tag{10}$$

Pentru $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ obţinem:

$$F[x^n] = i^{n+1}[(-1)^{n+1}n_0'\sigma^{-n-1} - i\pi\delta(\sigma)]. \tag{11}$$

Trecem acum la distribuţiile $|x|^\lambda$ şi $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Adunînd, respectiv scăzînd formulele (4) şi (10), găsim: pentru $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$F[|x|^\lambda] \equiv F[x_+^\lambda] + F[x_-^\lambda] = -2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}, \tag{12}$$

$$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] \equiv F[x_+^\lambda] - F[x_-^\lambda] = 2i\Gamma(\lambda+1)\cos\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma. \tag{13}$$

Împărţind ambii membri ai egalităţii (12) cu $\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$ şi aplicînd o formulă clasică pentru funcţia Γ*, obţinem următoarea formulă

* v. G. M. Fichtengolt, *Curs*, vol. II, pag. 695.

elegantă pentru transformarea Fourier a funcţiei întregi $f_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$:

$$F[f_\lambda(x)] = F\left[\frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right] = \sqrt{2\pi}\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}|\sigma|^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = \sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma). \tag{12'}$$

Transformînd în mod analog formula (13) şi punînd $g_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$,

$$= \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)},$$

$$F[g_\lambda(x)] = \sqrt{2\pi}i\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(-\frac{\lambda+1}{2}\right)} = \sqrt{2\pi}\,ig_{-\lambda-1}(\sigma). \tag{13'}$$

La fel, pentru $\lambda = n$ $(n = 0,1,2, \ldots)$, plecînd de la formulele (5) şi (11), găsim:

$$F[|x|^n] \equiv F[x_+^n] + F[x_-^n] = i^{n+1}[(1 + (-1)^{n+1})\sigma^{-n-1}n! + ((-1)^{n+1} - 1)\,i\pi\delta^{(n)}(\sigma)], \tag{14}$$

$$F[|x|^n \operatorname{sgn} x] \equiv F[x_+^n] - F[x_-^n] = i^{n+1}[(1 - (-1)^{n+1})\sigma^{-n-1}n! + (-1)^{n+1} + 1)\,i\pi\delta^{(n)}(\sigma)]. \tag{15}$$

În particular, pentru n par $n = 0, 2, \ldots, 2k, \ldots$,

$$F[x^{2k}] = (-1)^k 2\pi\delta^{(2k)}(\sigma), \tag{16}$$

$$F[|x|^{2k}\operatorname{sgn} x] = 2i(-1)^k(2k)!\,\sigma^{-2k-1}, \tag{17}$$

iar pentru n impar, $n = 1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots$:

$$F[x^{2k+1}] = 2\pi i(-1)^{k+1}\delta^{(2k+1)}(\sigma), \tag{18}$$

$$F[|x|^{2k+1}] = 2(-1)^{k+1}(2k+1)!\,\sigma^{-2k-2}. \tag{19}$$

Distribuţiile $|x|^\lambda$ şi $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ rămîn continue şi pentru unele valori întregi negative ale lui λ; prima pentru valorile pare $\lambda = -2k-2$, cea de-a doua — pentru valori impare $\lambda = -2k-1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Formulele ce dau transformatele Fourier ale acestor distribuţii se obţin direct din formulele (12), (13) dacă le aplicăm încă odată operatorului F, utilizînd formula $FF[f(x)] = 2\pi f(-x)$ (v. § 2.1 formula (5)) şi permutînd în rezultatul obţinut pe x cu σ. Obţinem astfel:

$$F[x^{-2k-2}] = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{(2k+1)!}|\sigma|^{2k+1}, \tag{20}$$

$$F[x^{-2k-1}] = \frac{(-1)^k i\pi}{(2k)!}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma. \tag{21}$$

Vedem că aceste formule se obţin din formulele (12) şi (13) făcînd pe $\lambda = -2k-2$, respectiv $\lambda = -2k-1$.

Pe aceeaşi cale, aplicînd de două ori operatorul F formulelor (3) şi (9) şi schimbînd pe $-\lambda-1$ cu λ se pot obţine transformatele Fourier ale distribuţiilor $(x+i0)^\lambda$ şi $(x-i0)^\lambda$:

$$F[(x+i0)^\lambda] = \frac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_-^{-\lambda-1}; \tag{22}$$

$$F[(x-i0)^\lambda] = \frac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_+^{-\lambda-1}. \tag{23}$$

Formulele obţinute sînt strînse în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr.	Distribuţia f	Transformata Fourier $F[f]$
1	$\lvert x\rvert^\lambda$ $(\lambda \neq -1, -3, \ldots)$	$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}$
2	$f_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma)$
3	$\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sgn} x$ $(\lambda \neq -2, -4, \ldots$	$2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$
4	$g_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}i\,g_{-\lambda-1}(\sigma)$
5	x^m	$2(-i)^m\pi\delta^{(m)}(\sigma)$
6	x^{-m}	$\frac{i^m\pi}{(m-1)!}\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$
7	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn}\sigma$
8	x^{-2}	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
9	x_+^λ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}] =$ $= ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$*
10	x_+^n	$i^{n+1}n!\,\sigma^{-n-1} + (-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
11	$\theta(x)$	$i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma)$
12	x_-^λ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} -$ $- e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\times$ $\times\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}$*]
13	$(x+i0)^\lambda$	$\frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}$
14	$(x-i0)^\lambda$	$\frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}$

* Prima pentru $\lambda \neq 0, 1, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2.4. Transformatele Fourier ale distribuției $x_+^\lambda \ln x_+$ și ale altor distribuții *. Derivînd în raport cu λ transformatele Fourier obținute la punctul precedent, obținem noi formule de transformate Fourier. Astfel, derivînd formula (2) de la punctul precedent găsim că pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$(1)\qquad F[x_+^\lambda \ln x_+] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Gamma'(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0) + i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\Big\} =$$

$$= ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}.$$

De asemenea, derivînd formula (8) de la § 2.3 găsim că pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

(2)

$$F[x_-^\lambda \ln x_-] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1) - i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}.$$

În particular, punînd $\lambda = 0$, obținem:

$$(3)\qquad F[\ln x_+] = i\Big\{\Big(\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma+i0)^{-1} - (\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)\Big\};$$

$$(4)\qquad F[\ln x_-] = -i\Big\{\Big(\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma-i0)^{-1} - (\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}.$$

* Acest punct poate fi omis la prima citire. Rezultatele sînt adunate la finele volumului într-un tabel de transformate Fourier.

Adunînd și scăzînd formulele (1)—(2) găsim:

$$F[|x|^\lambda \ln|x|] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0) +$$

$$(5)\qquad +ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0),$$

$$F[|x|^\lambda \ln|x| \operatorname{sgn} x] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1} +$$

$$+ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big]\times(\sigma-i0)^{-\lambda-1} -$$

$$-ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0) -$$

$$(6)\qquad -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0).$$

În particular, pentru $\lambda = 0$ avem:

$$F[\ln|x|] = i\Big[\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma+i0)^{-1} - i\Big[\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma-i0)^{-1} -$$

$$(7)\qquad -i(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0) + i(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0),$$

$$F[\ln|x| \operatorname{sgn} x] = i\Big[\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma+i0)^{-1} + i\Big[\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\Big]\cdot$$

$$(8)\qquad \cdot(\sigma-i0)^{-1} - i(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0) - i(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0).$$

Trecînd la limită, $\lambda \to -2k$, în formula (5) și $\lambda \to -2k-1$ în formula (6), putem găsi expresiile lui $F[x^{-2k}\ln|x|]$ și $F[x^{-2k-1}\ln|x|]$. Vom găsi aceste expresii în continuare pe o altă cale.

Transformatele Fourier ale distribuțiilor x_+^{-n}, x_-^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+$, $x_-^{-n}\ln x$ se pot obține cu ajutorul dezvoltărilor Laurent ale lui x_+^λ, x_-^λ în vecinătatea valorii $\lambda = -n$.

După cum știm, dezvoltarea Laurent a funcției x_+^λ în vecinătatea lui $\lambda = -n$ este de forma

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_+^{-n} + (\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ + \dots$$

Aplicînd transformarea Fourier termen cu termen, ajungem la dezvoltarea

$$F[x_+^\lambda] = F\left[\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}\right] + F[x_+^{-n}] + (\lambda+n)\,F([x_+^{-n}\ln x_+] + \dots$$

(9)

Deci, dezvoltînd după puterile lui $\lambda+n$ distribuția (considerată ca funcție de $\lambda+n$)

$$F[x_+^\lambda] = ie_2^{i\lambda\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \tag{10}$$

și comparînd coeficienții seriei astfel obținute cu coeficienții seriei (9) găsim expresia transformatelor Fourier ale lui x_+^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+$, ...

Să remarcăm că $e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}$ și $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ sînt funcții întregi, iar $\Gamma(\lambda+1)$ are în $\lambda=-1$ un pol simplu; prin urmare, dezvoltarea căutată a funcției (10) după puterile lui $\lambda+n$ se poate obține ca produsul dintre seria Taylor a funcției $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ și seria Laurent a funcției

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\pi/2}\,\Gamma(\lambda+1).$$

Prima dintre aceste serii este de forma

$$(\sigma+i0)^{-\lambda-1} = \sigma^{n-1} - (\lambda+n)\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0)\dots, \tag{11}$$

iar a doua o scriem sub forma

$$A(\lambda) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \dots \tag{12}$$

Coeficienții $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}$, ... se pot calcula explicit, vom da în continuare valorile lor. Multiplicînd seriile (11) și (12) găsim:

$$ie^{i\frac{\lambda\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)\,(\sigma+i0)^{-\lambda-1} = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\,\sigma_+^{n-1}\,[a_0^{(n)}\sigma^{n-1} - a_{-1}^{(n)n-1}\ln(\sigma+i0)] +$$

$$+(\lambda+n)\,[a_1^{(n)}\sigma^{n-1} - a^{(n)}{}_0\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \frac{1}{2}a_-^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0)] + \dots \tag{13}$$

Comparînd coeficienții dezvoltărilor (9) și (13) se obține:

$$F[x_+^{-n}] = a_0^{(n)}\sigma^{n-1} - a_{-1}^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0),$$

$$F[x_+^{-n}\ln x_+] = a_1^{(n)}\,\sigma^{n-1} - a_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \tag{14}$$

$$+\frac{1}{2}\,a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0). \tag{15}$$

Calcule asemănătoare conduc la determinarea transformatelor Fourier ale distribuțiilor x_-^{-n}, $x_-^{-n}\ln x$, ș.a.m.d. Plecăm de la dezvoltarea în serie Laurent

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)\,x_-^{-n}\ln x_- + \dots,$$

căreia îi aplicăm transformarea Fourier termen cu termen

$$F[x_-^\lambda] = F\left[\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}\right] + F[x_-^{-n}] + (\lambda+n)\,F[x_-^{-n}\ln x] + \dots \tag{16}$$

Pentru că

$$F[x_-^\lambda] = -\,ie^{i\lambda\pi/2}\,\Gamma(\lambda+1)\,(\sigma-i0)^{-\lambda-1},$$

putem obține formulele ce ne interesează dezvoltînd această ultimă funcție după puterile lui $(\lambda+n)$ și comparînd coeficienții cu coeficienții corespunzători ai seriei (16). Avem:

$$(\sigma-i0)^{-\lambda-1} = \sigma^{n-1} - (\lambda+n)\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0) +$$

(17)

$$+\frac{1}{2}(\lambda+n)^2\,\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0) + \ldots,$$

(18) $$-ie^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = B(\lambda) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n)\ldots,$$

de unde

$$F[x_{-1}^\lambda\,\lambda) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\,\sigma^{n-1} + [b_0^{(n)}\,\sigma^{n-1} - b_1^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0)] +$$

(19) $$+(\lambda+n)[\,b_1^{(n)}\,\sigma^{n-1} - b_0^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0) +$$

$$+\frac{1}{2}\,b_{-1}^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0) + \ldots$$

Comparînd coeficienții din (16) și (19) obținem:

(20) $$F[x_-^{-n}] = b_0^{(n)}\,\sigma^{n-1} - b_1^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0),$$

(21) $$F[x_-^{(n)}\ln x] = b_1^{(o)}\,\sigma^{n-1} - b_0^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0) + \frac{1}{2}\,b_{-1}^{(n)}\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0),$$

. . . . . .

Să găsim acum transformatele Fourier ale distribuțiilor

$$|x|^{-n},\ |x|^{-n}\ \operatorname{sgn} x,\ |x|^{-n}\ln|x|\ \text{și}\ |x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn} x.$$

Dezvoltăm funcția $|x|^\lambda$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $\lambda = -2k$:

$$|x|^\lambda = x^{-2k} + (\lambda+2k)\,x^{-2k}\ln|x| + \ldots$$

Aplicăm transformarea Fourier termen cu termen:

(22) $$F[|x|^\lambda] = F[x^{-2k}] + (\lambda+2k)\,F[x^{-2k}\ln|x|] + \ldots$$

Pe de altă parte avem:

$$F[|x^\lambda|] = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,|\sigma|^{-\lambda-1}.$$

Notăm

(23) $$C(\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1).$$

Această funcție este regulată pentru $\lambda = -2k$, și avem:

(24) $$C(\lambda) = c_0^{(2k)} + (\lambda+2k)\,c_1^{(2k)} + \ldots$$

Apoi, în vecinătatea punctului $\lambda = -2k$:

(25) $$|\sigma|^{-\lambda-1} = |\sigma|^{2k-1} - (\lambda+2k)\,|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma| + \ldots$$

Înmulțind dezvoltările (24) și (25) și comparînd rezultatul cu (22), găsim:

(26) $$F[x^{-2k}] = c_0^{(2k)}\,|\sigma|^{2k-1}$$

(v. formula 20) de la § 2.3),

(27) $$F[x^{-2k}\ln|x|] = c_1^{(2k)}\,|\sigma|^{2k-1} - c_0^{(2k)}\,|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma|.$$

Termenii de ordin superior din (22), (24) și (25) pot fi folosiți pentru a găsi $F[x^{-2k}\ln^2|x|]$, ș.a.m.d.

Procedăm analog cu $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ în vecinătatea punctului $\lambda = -2k-1$:

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x^{-2k-1} + (\lambda+2k+1)\,x^{-2k-1}\ln|x| + \ldots$$

Aplicînd transformarea Fourier termen cu termen, obținem:

(28) $$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] = F[x^{-2k-1}] + (\lambda+2k+1)\,F[x^{-2k-1}\ln|x|] + \ldots$$

Pe de altă parte

$$F[|x|^{\lambda}\operatorname{sgn} x] = iD(\lambda)\,|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma,$$

unde

$$D(\lambda) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1). \tag{29}$$

Dezvoltăm funcțiile $D(\lambda)$ și $|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$ după puterile lui $\lambda+2k+1$:

$$D(\lambda) = d_0^{(2k-1)} + (\lambda+2k+1)\,d_1^{(2k+1)} + \ldots, \tag{30}$$

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = |\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma - (\lambda+2k+1)\,|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma + \ldots \tag{31}$$

Înmulțind (30) cu (31) și comparînd cu (28), găsim:

$$F[x^{-2k-1}] = id_0^{(2k+1)}\,|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma \tag{32}$$

(v. formula (21) § 2.3).

(33) $\mathbf{F}[x^{-2k-1}\ln|x|] = id_1^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma - id_0^{(2k+1)}\,|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma$ ș.a.m.d.

Mai trebuie calculate transformatele Fourier ale distribuțiilor $|x|^{-n}$ și $|x|^{-n}\ln|x|$ pentru valorile impare ale lui n și transformatele Fourier ale distribuțiilor $|x|^{-n}\operatorname{sgn} x$ și $|x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn} x$ pentru n par. Vom găsi aceste transformate Fourier pe aceeași cale ca mai înainte, cu diferența că în locul seriei Taylor vom utiliza dezvoltarea Laurent.

Să dezvoltăm pe $|x|^{\lambda}$ în serie Laurent în vecinătatea lui $\lambda = -2k-1$:

$$|x|^{\lambda} = 2\,\frac{\delta^{(2k)}(\lambda)}{(2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k+1} + |x|^{-2k-1} + (\lambda+2k+1)\,|x|^{-2k-1}\ln|x| + \ldots$$

Aplicînd transformarea Fourier fiecărui termen în parte și sumînd găsim:

$$F[|x|^{\lambda}] = 2\,\frac{F[\delta^{(2k)}(x)]}{(2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k+1} + F[|x|^{-2k-1}] + \tag{34}$$
$$+ (\lambda+2k+1)\,F[|x|^{-2k+1}\ln|x|] + \ldots$$

Pe de altă parte, înmulțind dezvoltarea

$$C(\lambda) = \frac{c_{-1}^{(2k+1)}}{\lambda+2k+1} + c_0^{(2k-1)} + (\lambda+2k+1)\,c_1^{(2k+1)} + \ldots \tag{35}$$

și

$$|\sigma|^{-\lambda-1} = \sigma^{2k} - (\lambda+2k+1)\,\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \tag{36}$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda+2k+1)^2\,\sigma^{2k}\ln^2|\sigma| + \ldots,$$

obținem:

$$F[|x|^{\lambda}] = \frac{c_1^{(2k+1)}\sigma^{2k}}{\lambda+2k+1} + [c_0^{(2k+1)}\,\sigma^{2k} - c^{(2k-1)}\,\sigma^{2k}\ln|\sigma|] + \tag{37}$$
$$+(\lambda+2k+1)\,[c_1^{(2k+1)}\,\sigma^{2k} - c_0^{(2k+1)}\,\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}c_{-1}^{(2k+1)}\,\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|] + \ldots$$

Prin urmare:

$$F[|x|^{-2k-1}] = c_0^{(2k+1)}\,\sigma^{2k} - c_{-1}^{(2k-1)}\,\sigma^{2k}\ln|\sigma|, \tag{38}$$

$$F[|x|^{-2k-1}\ln|x|] = c_0^{(2k+1)}\,\sigma^{2k} - c_0^{(2k+1)}\,\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \tag{39}$$
$$+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2k-1)}\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|,$$

. . . . . .

Calculele asemănătoare cu distribuția $|x|^{\lambda}\operatorname{sgn} x$ în vecinătatea punctului $\lambda = -2k$ conduc la:

$$|x|^{\lambda}\operatorname{sgn} x = 2\,\frac{\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}\,\frac{1}{\lambda+2k} + |x|^{-2k}\operatorname{sgn} x +$$
$$+ (\lambda+2k)\,|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \ldots,$$

$$F[|x|^{\lambda}\operatorname{sgn} x] = 2\,\frac{F[\delta^{(2k-1)}(x)]}{(2k-1)!}\,\frac{1}{\lambda+2k} + F[|x|^{-2k}\operatorname{sgn} x] + \tag{40}$$
$$+ (\lambda+2k)\,F[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x] + \ldots$$

Pe de altă parte, înmulțind dezvoltarea

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = \sigma^{2k-1} - (\lambda+2k)\sigma^{2k+1}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}(\lambda+2k)^2\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|,$$

(41)

și

$$D(\lambda) = \frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k} + d_0^{(2k)} + (\lambda+2k)\,d_1^{(2k)} + \ldots, \tag{42}$$

găsim

$$D(\lambda)\,|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = \frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k}\,\sigma^{2k-1} + [d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_{-1}^{(2k)}\,\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|] +$$

(43)

$$+ (\lambda+2k)\,[d_1^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}\,d_{-1}^{(2k)}\,\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|] + \ldots$$

Comparînd (40) și (43), obținem formulele:

$$F[|x|^{-2k}\operatorname{sgn}x] = id_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - id_{-1}^{(2k)}\,\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|,$$

$$F[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn}x] = id_1^{(2k)}\,\sigma^{2k-1} - id_0^{(2k)}\,\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| +$$

$$+\frac{1}{2}\,d_{-1}^{(2k)}\,\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|,$$

. . . . . .

În cursul calculelor am introdus următoarele funcții:

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\lambda+1) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$B(\lambda) = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\lambda+1) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$C(\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1) = \frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$D(\lambda) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1) = \frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + d_0^{(n)} + d_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots$$

Remarcăm că $B(\lambda) = \overline{A(\lambda)}$ pentru λ reali, adică $B(\lambda)$ se obține din $A(\lambda)$ schimbînd pe i cu $-i$. În plus, $C(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)$, adică $C(\lambda) = 2\operatorname{Re}A(\lambda)$ pentru λ real, iar $D(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)$, adică $D(\lambda) = 2i\operatorname{Im}A(\lambda)$ pentru λ real. Valorile lui $a_{-1}^{(n)}\,a_0^n$ și $a_1^{(n)}$ le dăm fără demonstrație:

$$a_1^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$a_0^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right];$$

$$a_1^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{i\neq k\\ 1\leq i,\,k\leq n-1}}\frac{1}{jk} - \frac{\pi^2}{8} + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(n-1)}\right)\Gamma'(1) + \Gamma''(1) + i\,\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)\right]\right\};$$

$$b_i^{(n)} = \bar{a}_i^{(n)};\quad c_i^{(n)} = 2\operatorname{Re}\,a_i^{(n)};\quad d_i^{(n)} = 2\operatorname{Im}\,a_i^{(n)}.$$

În particular;

$$b_{-1}^{(n)} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!};\quad c_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2};$$

$$d_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

2.5. **Transformata Fourier a distribuției** $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$. Să considerăm funcția $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$, egală cu $(ax^2+bx+c)^\lambda$ pentru acei x pentru care $ax^2+bx+c>0$, nulă pentru celelalte valori ale lui x. Distribuția corespunzătoare este definită prin egalitatea

$$((ax^2+bx+c)_+^\lambda, \varphi(x)) = \int_{ax^2+bx+c>0}(ax^2+bx+c)^\lambda\,\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

pentru acei λ pentru care integrala există, iar pentru alți λ, ca prelungirea analitică a acestei integrale.

Domeniul în care $ax^2 + bx + c > 0$, dacă există, poate fi unul din următoarele tipuri:

1) intervalul $\alpha < x < \beta$;
2) întreaga dreaptă;
3) semiaxele $x < \alpha$ și $x > \beta$ $(\alpha < \beta)$;
4) întreaga axă reală cu excepția unui singur punct $x = \alpha$.

Prin transformări liniare asupra variabilei x (o translație și o omotetie) se poate reduce funcția $(ax^2 + bx + c)_+^\lambda$ la unul din următoarele trei tipuri: în cazul 1) la $(1 - x^2)_+^\lambda$; în cazul 2) la $(1 + x^2)_+^\lambda = (1 + x^2)^\lambda$; în cazul 3) la $(x^2 - 1)_+^\lambda$; în cazul 4) la $x_+^{2\lambda}$. Ultimul caz nu ne interesează pentru că distribuția $x_+^{2\lambda}$ și transformata sa Fourier au fost deja studiate.

În primul caz integrala,

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\lambda \varphi(x)\, dx$$

converge pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$; pentru alți λ regularizata sa (prin prelungire analitică) se obține cu ajutorul formulelor date în cap. I, § 3. Este dealtfel clar că distribuția $(1 - x^2)_+^\lambda$ este analitică peste tot, cu excepția punctelor $\lambda = -1, -2, \ldots, -k \ldots$ în care are poli; reziduul în polul $\lambda = -k$ este egal cu $\dfrac{(-1)^{k-1}\,\delta^{k-1}(1 - x^2)}{(k-1)!}$.

Aici $\delta^{(k-1)}(1 - x^2)$ este distribuția definită de formula

$$\delta^{(k-1)}(1 - x^2) = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k x^{k-1}} [\delta^{(k-1)}(x - 1) - \delta^{k-1}(x + 1)].$$

Analog, distribuția $(1 + x^2)^\lambda$ este definită de integrala convergentă pentru $\mathrm{Re}\,\lambda < -\dfrac{1}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

analitică pentru toți λ, iar distribuția $(x^2 - 1)_+^\lambda$ este definită ca suma integralelor convergente pentru $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -\dfrac{1}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{-1} (1 - x^2)^\lambda \varphi(x)\, dx + \int_{1}^{\infty} (1 - x^2)^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

analitică pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ și având în punctul $\lambda = -k$ un pol de reziduu $\dfrac{(-1)^{k-1}\,\delta^{(k-1)}(x^2 - 1)}{(k-1)!}$. Aici $\delta^{(k-1)}(x^2 - 1)$ este distribuția definită de formula

$$\delta^{(k-1)}(x^2 - 1) = (-1)\,\delta^{(k-1)}(1 - x^2) = \frac{1}{2^k x^{k-1}} [\delta^{(k-1)}(x - 1) - \delta^{(k-1)}(x + 1)].$$

În legătură cu definițiile de mai sus să definim distribuțiile $\delta(f(x))$ și $\delta^{(k)}(f(x))$.

Fie, pentru început, $f(x)$ o funcție indefinit derivabilă, având o unică rădăcină, simplă în punctul $x = x_0$, pentru care $f'(x_0) > 0$. În integrala

$$\text{(I)} \qquad \int \delta(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

vom face substituția $t = f(x)$. Formula (I) devine,

$$\int \delta(f(x)) \varphi(f(x)) f'(x)\, dx = \varphi(0);$$

punînd $\varphi(f(x))\, f'(x) = \psi(x)$, obținem:

$$\int \delta(f(x))\, \psi(x)\, dx = \frac{\psi(x_0)}{f'(x_0)},$$

Dacă $f'(x_0) < 0$, pentru ca integrarea să se facă în sensul crescător al variabilei x, trebuie introdus în fața integralei semnul minus. Deci, în cazul general

$$\text{(II)} \qquad \int \delta(f(x))\, \psi(x)\, dx = \frac{\psi(x_0)}{|f'(x_0)|}.$$

Aceste considerente sugerează natural următoarea definiție. Fie $f(x)$ o funcție diferențiabilă având o singură rădăcină, simplă, în punctul $x = x_0$. Distribuția $\delta(f(x))$ este funcționala definită de formula (II), $\psi(x)$ fiind o funcție test oarecare.

Fie acum $f(x)$ având un număr oarecare de zerouri simple. În acest caz este natural de a defini $\delta(f(x))$ prin formula

$$\text{(III)} \qquad \int \delta(f(x))\, \psi(x)\, dx = \sum_n \frac{\psi(x_n)}{|f'(x_n)|},$$

sumarea făcîndu-se după toate rădăcinile ecuației $f(x) = 0$. Ea se poate rescrie

$$\text{(IV)} \qquad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x - x_n).$$

De pildă, $\delta(\sin x) = \sum_n \delta(x - \pi n)$.

Definiția lui $\delta^{(k)}(f(x))$ se obține ușor din (IV) prin derivare formală. Derivînd odată formula (IV) obținem:

$$\delta'(f(x))f'(x) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\delta(x - x_n).$$

Putem împărți cu $f'(x)$, căci în punctele $x = x_n$, f' nu se anulează:

$$\delta'(f(x)) = \sum_n \frac{1}{f'(x_n)}\,\frac{1}{f'(x)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\delta(x - x_n).$$

Repetînd derivarea ajungem la următoarea definiție:

$$\text{(V)} \qquad \delta^{(k)}(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\left(\frac{1}{f'(x)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \delta(x - x_n).$$

Să găsim transformatele Fourier ale distribuțiilor $(1 - x^2)_+^\lambda$, $(1 + x^2)^\lambda$, $(x^2 - 1)_+^\lambda$. Aceste transformate Fourier, pentru acele valori ale lui λ pentru care integralele corespunzătoare converg, se exprimă cu ajutorul funcțiilor Bessel; în virtutea unicității prelungirii analitice, aceste expresii se păstrează și pentru alți λ. Este interesant faptul că, pentru valorile întregi ale lui λ, aceste transformate Fourier se exprimă cu ajutorul funcțiilor elementare și al derivatelor lui δ. Astfel se stabilește o legătură între funcțiile Bessel, pe de o parte, și derivatele lui δ pe de altă parte.

Începem cu calculul transformatei Fourier a distribuției $(1 - x^2)^\lambda$. Pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ are loc formula *

$$\text{(2)} \qquad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\lambda\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda + 1)\left(\frac{s}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(s).$$

* v. I. M. Rijik și I. S. Gradstein, *Tabele*, pag. 345, formula (6.413, 3).

Funcția ce figurează în membrul drept, și prin urmare și cea din membrul stîng, este analitică pentru toți λ cu excepția lui $\lambda = -1, -2, \ldots$ în aceste puncte expresia considerată are poli simpli.

Astfel, transformata Fourier a distribuției $(1 - x^2)_+^\lambda$ este dată de formula

$$\text{(2')} \qquad F[(1 - x^2)_+^\lambda] = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda + 1)\left(\frac{s}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(s),$$

pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Reziduul expresiei considerate pentru $\lambda = -n$ este egal cu

$$\text{(3)} \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s).$$

Acest reziduu se poate exprima și altfel. Pentru aceasta împărțim ambii membrii ai formulei (2) prin $\Gamma(\lambda + 1)$ și calculăm limita pentru $\lambda \to -n$. Cum

$$\lim_{\lambda \to -n} \frac{(1-x^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \delta^{(n-1)}(1 - x^2),$$

atunci

$$\text{(4)} \qquad \sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(1 - x^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x.$$

Această integrală, după cum se verifică ușor, este egală cu

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{2^{n-1}}\,s^{2n-1}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{(s\,\mathrm{d}s)^{n-1}}\left(\frac{\cos s}{s}\right).$$

Aceasta este a doua expresie a reziduului pentru $\lambda = -n$. Pentru $\lambda = n$, întregi pozitivi se obține ușor formula

$$\text{(6)} \qquad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x = 2^{n+1} n!\,(-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{(s\mathrm{d}s)^n}\left(\frac{\sin s}{s}\right).$$

Pentru demonstrația acestei formule remarcăm că ea este valabilă pentru $n = 0$. Să presupunem formula (6) valabilă pentru un

anumit n. Aplicînd ambilor membri ai egalității (6) operatorul $\frac{2d}{sds}$ și integrînd prin părți se verifică valabilitatea formulei și pentru $n+1$.

Din formulele obținute se deduce ușor expresia funcțiilor Bessel de indice semiîntreg cu ajutorul funcțiilor elementare. Egalînd expresiile (3) — (5) găsim :

$$(7) \qquad J_{-n+\frac{1}{2}}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s^{n-\frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{(sds)^{n-1}} \left(\frac{\cos s}{s}\right).$$

Expresia de mai sus se aplică dacă indicele funcției Bessel este negativ. Pentru a găsi expresia funcției Bessel de ordin semiîntreg, pozitiv, cu ajutorul funcțiilor elementare, facem în formula (2) $\lambda = n$:

$$(8) \qquad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n e^{isx}\, dx = n!\, \sqrt{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s).$$

Egalînd pe (6) cu (8), găsim

$$(7') \qquad J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(x\,dx)^n} \left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Am arătat astfel că, atît pentru semiîntregi negativi cît și pentru semiîntregi pozitivi r, funcția $J_r(x)$ se exprimă cu ajutorul funcțiilor elementare.

Să considerăm acum funcția $(1+x^2)^\lambda$. Transformata Fourier a acestei funcții pentru $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ este *

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^\lambda e^{isx}\, dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)} \left(\frac{|s|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|).$$

Formula (9) se păstrează pentru toți λ. Pentru $\lambda = n$ întreg nenegativ, transformata Fourier se găsește ușor direct : funcția $(1+x^2)^\lambda$ este polinomul $(1+x^2)^n$, iar funcția $|s|^{-\lambda-1/2} K_{-\lambda-1/2}(|s|)$ are un pol. Transformata Fourier a lui $(1+x^2)^n$ este, după cum știm, egală cu $\left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s)$.

* v. I. M. Rijic și I. S. Gradstein, Tabele, pag. 281, formula (5.116, 1)

Rezultă deci că

$$(10) \qquad \lim_{\lambda \to -n} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda-\frac{1}{2}} K_{\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) = \sqrt{\pi} \left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s).$$

În sfîrșit, să considerăm transformata Fourier a distribuției $(x^2-1)_+^\lambda$. Ea este egală cu

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{-1} (x^2-1)^\lambda e^{isx}\, dx + \int_{1}^{\infty} (x^2-1)^\lambda e^{isx}\, dx = 2\int_{1}^{\infty} (x^2-1)^\lambda \cos sx\, dx$$

Dar pentru $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ are loc egalitatea *

$$(12) \qquad \int_{1}^{\infty} (x^2-1)^\lambda \cos sx\, dx = -\frac{\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}}{2\left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda+\frac{1}{2}}} N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|).$$

Rezultă că, pentru orice $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ transformata Fourier a distribuției $(x^2-1)_+^\lambda$ este egală cu

$$2\int_{1}^{\infty} (x^2-1)^\lambda \cos sx\, dx = -\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi} \left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}} N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) =$$

(13)

$$= \Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi} \left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) - J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|s|)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}.$$

Deosebit de simplu se calculează transformatele Fourier ale funcției $(x^2-1)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. În acest caz,

$$(14) \qquad 2\int_{1}^{\infty} (x^2-1)^n \cos sx\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2-1)^n e^{isx}\, dx +$$

* v. Idem. pag. 347, formula (6.422).

$$+ (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, e^{isx} \, dx = 2\pi (-1)^n \left(1 + \frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) +$$

(14)

$$+ (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s).$$

Astfel, transformata Fourier a funcției $(x^2 - 1)_+^n$ este egală cu:

(15) $$2\pi (-1)^n \left(1 + \frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) + (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s).$$

2.6. **Transformatele Fourier ale funcționalelor analitice.** Să considerăm funcționala analitică pe spațiul Z:

(1) $$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s) \, \psi(s) \, ds.$$

Conturul de integrare Γ poate fi mărginit sau nu, dar în orice caz pe el funcția $g(s) \, e^{sb}$ trebuie să fie integrabilă pentru orice valoare reală a lui b. Afirmăm că funcționala g este transformata Fourier a unei funcționale regulate pe spațiul K, anume cea definită de funcția

(2) $$f(x) = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma g(s) \, e^{isx} \, dx}.$$

Mai întîi remarcăm că funcția $f(x)$ este definită pentru orice x datorită ipotezei făcute privind conturul Γ. Fie $\varphi(x)$ o funcție test a cărei transformată Fourier este funcția $\psi(s)$; atunci, introducînd în formula (1) expresia lui $\psi(s)$, transformata Fourier a lui $\varphi(x)$, găsim

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \, e^{isx} \, dx \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left\{ \int_\Gamma g(s) \, e^{isx} \, ds \right\} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \varphi(x) \, dx = 2\pi (f, \varphi),$$

unde $f(x)$ este definită de formula (2), adică ceea ce se afirmase.

Fie de pildă Γ un contur închis mărginit ce înconjoară o singularitate izolată s_0 a funcției $g(s)$. În acest caz, funcția $\overline{f(x)}$, conform teoremei reziduurilor, este de forma

$$\overline{f(x)} = \int_\Gamma g(s) \, e^{isx} \, dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{s=s_0} [g(s) \, e^{-isx}].$$

Exemplu. Să considerăm funcționala analitică

(3) $$(g(s), \psi(s)) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}} \psi(s) \, ds$$

integrala efectuîndu-se pe axa imaginară (sau pe orice drum echivalent). Din cele arătate, funcționala g este transformata Fourier a funcției f, definită de egalitatea

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}} e^{isx} \, ds.$$

Această integrală se calculează ușor. Înlocuind s cu $i\tau$, ea devine:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2} - x} \, d\tau = \frac{i}{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\tau + x)^2} \, d\tau = \frac{i}{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \, d\tau = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Așadar, funcționala analitică (3) este transformata Fourier a funcției

$$f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Putem astfel spune că transformata Fourier a funcției $e^{\frac{x^2}{2}}$ este funcționala analitică definită de funcția $i\sqrt{2\pi} \, e^{\frac{s^2}{2}}$ și conturul $(-i\infty, +i\infty)$.

§ 3. Transformarea Fourier a distribuțiilor. Cazul mai multor variabile

3.1. **Definiții.** Transformata Fourier a funcționalei f, definită pe spațiul K al funcțiilor test $\varphi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se definește ca fiind funcționala g definită pe spațiul Z al funcțiilor $\psi(s)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, ce acționează astfel

$$(g, \psi) = (2\pi)^n (f, \varphi), \tag{1}$$

în care $\psi = \tilde{\varphi}$ este transformata Fourier a funcției $\varphi(x)$. Funcționala g este liniară și continuă; ea se notează cu $\tilde{f}$ sau cu $F[f]$. Rezultatele paragrafului 2 se transpun la acest caz fără modificări deosebite. Formulele (2)—(3) din § 2.1 capătă forma următoare: dacă P este un polinom de n variabile, cu coeficienți constanți, atunci

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[f] = F[P(\mathrm{i}x_1, \ldots, \mathrm{i}x_n) f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f\right] = P(-\mathrm{i}s_1, \ldots, -\mathrm{i}s_n)\tilde{f}. \tag{3}$$

Operatorul invers F^{-1} este definit pe spațiul Z' cu valori în spațiul K' și este definit de formula

$$(F^{-1} g, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (g, F\varphi). \tag{4}$$

Dacă $f(x)$ este o funcție având transformata Fourier în sens uzual, atunci funcționala $\tilde{f}$ este funcționala regulată ce corespunde transformatei Fourier a funcției $f(x)$.

Dintre funcționalele singulare, cea mai simplă este distribuția δ; pentru ea avem formulele

$$\widetilde{\delta(x)} = 1, \ \tilde{1} = (2\pi)^n \delta(s), \tag{5}$$

asemănătoare formulelor (2) din § 2.2.

Formula ce dă *transformata Fourier a unui polinom* se obține combinînd formulele (2) și (5):

$$F[P(x_1, \ldots, x_n)] = F[P(x_1, \ldots, x_n) 1] =$$

$$= (2\pi)^n P\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial s_n}\right) \delta(s). \tag{6}$$

Să vedem ce devine transformata Fourier a unei distribuții căreia i s-a aplicat o transformare liniară a variabilelor (cap. I, § 1.6). Avem, pentru o funcție test $\varphi(x)$, după ce am notat

$$u^{-1} x = y, \ x = uy, \ \mathrm{d}x = |u| \, \mathrm{d}y:$$

$$F[\varphi(u^{-1}x)] = \int \varphi(u^{-1}x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau, x)} \, \mathrm{d}x = |u| \int \varphi(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau, uy)} \, \mathrm{d}y =$$

$$= |u| \int \varphi(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u'\tau, y)} \, \mathrm{d}y = |u| \, \tilde{\varphi}(u'\sigma),$$

adică transformării u^{-1} efectuate asupra variabilelor x îi corespunde transformarea transpusă u' efectuată asupra variabilelor duale și înmulțirea rezultatului cu $|u|$. În continuare, pentru o distribuție f vom nota ca de obicei $\psi(\sigma) = F[\varphi(x)]$:

$$(F[f(ux)], F[\varphi(x)]) =$$

$$= (2\pi)^n (f(ux), \varphi(x)) =$$

$$= (2\pi)^n (f(x), \varphi(u^{-1}x)) = (F[f(x)], F[\varphi(u^{-1}x)]) =$$

$$= (F[f(x)], |u| \varphi(u'\sigma)) = |u| (F[f(x)], F[\varphi(u'\sigma)]).$$

Notînd apoi $g(\sigma) = F[f(x)]$, $g_u(\sigma) = F[f(ux)]$, obținem:

$$(g_u(\sigma), \psi(\sigma)) = (g(\sigma), \psi(u'\sigma)) = (g(u'^{-1}\sigma), \psi(\sigma)),$$

de unde

$$g_u(\sigma) = |u| \, g(u'^{-1}\sigma).$$

Astfel, transformării $f(x) \to f(ux)$ în spațiul distribuțiilor, îi corespunde în spațiul transformatelor Fourier, transformarea $g(\sigma) \to |u| g(u'^{-1}\sigma)$.

În particular, dacă distribuția f este invariantă față de transformarea u, deci $f(ux) = f(x)$, atunci transformata sa Fourier este invariantă față de transformarea u'^{-1} urmată de înmulțirea cu $|u|$, adică $|u|\, g(u'^{-1}\sigma) = g(\sigma)$. De pildă, dacă f are simetrie sferică, atunci transformata sa Fourier are simetrie sferică, căci în cazul unei rotații $u'^{-1} = u$, $|u| = 1$.

3.2. **Transformata Fourier a produsului direct.** Fie $f(x)$, $g(y)$ două distribuții date, respectiv în variabilele $x = (x_1, \ldots, x_k)$ și $y = (y_1, \ldots, y_m)$, iar $\tilde{f}(\xi)$ și $\tilde{g}(\eta)$ transformatele lor Fourier. Atunci transformata Fourier a produsului direct $f(x)\, g(y)$ (în raport cu ansamblul variabilelor) este dată de formula

$$F[f \times g] = \tilde{f}(x) \times \tilde{g}(\eta),$$

adică *este egală cu produsul direct al transformatelor Fourier a funcționalelor* f și g. Pentru demonstrație este suficient (v. cap. I, § 4.1) de a demonstra egalitatea doar pentru funcțiile test $\varphi(x, y)$ de forma $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Avem în acest caz

$$\widetilde{(f \times g,\ \sum \varphi_j \psi_j)} = (2\pi)^{m+k} (f \times g,\ \sum \varphi_k \psi_k) = (2\pi) \sum^{m+k} (f, \varphi_j)\, (g, \psi_j) =$$

$$= \sum (\tilde{f},\ \tilde{\varphi}_j)\ (\tilde{g},\ \tilde{\psi}_j) = (\tilde{f} \times \tilde{g}, \sum \tilde{\varphi}_j\, \tilde{\psi}_j) = (\tilde{f} \times \tilde{g},\ \sum \widetilde{\varphi_j\, \psi_j}) \text{ c.t.a.}$$

Exemple. 1. Dacă $f(x) = \delta(x)$, formula noastră devine

$$T[\delta(x) \times g(y)] = 1(\xi) \times \tilde{g}(\eta).$$

În particular,

$$T[\delta(x) \times 1(y)] = 1(\xi) \times (2\pi)^m\ \delta(\eta).$$

Cu alte cuvinte, transformata Fourier a funcției caracteristice a subspațiului R_y este funcția caracteristică a spațiului R_ξ, înmulțită cu $(2\pi)^m$.

2. Să calculăm transformata Fourier a funcției $f(x, y)$ de două variabile, egală cu 1 pentru $x > 0$, $y > 0$ și egală cu 0 în rest. Această

funcție este produsul (și prin urmare, produsul direct) al funcțiilor $\theta(x)$ și $\theta(y)$. Prin urmare, ținînd seama de formula (6) din § 2.3, obținem:

$$\widetilde{f(x,\ y)} = \widetilde{\theta(x)} \times \widetilde{\theta(y)} = [\pi\delta(\xi) + i\xi]^{-1} \times [\pi\delta(\tau) + i\eta^{-1}].$$

3.3. **Transformata Fourier a distribuției** r^λ. Conform cap. I, § 3.9, distribuția r^λ este definită pentru $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$ și are simetrie sferică. De aceea transformata sa Fourier $g_\lambda(\sigma)$ va avea și ea simetrie sferică. Integrala Fourier

$$g_\lambda(\sigma) = r^\lambda e^{i(\rho, x)}\, dx$$

converge pentru $-n < \mathrm{Re}\lambda < 0$ și este o funcție cu simetrie sferică, adică o funcție de $\rho = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$.
Apoi, pentru orice $t > 0$

$$g_\lambda(t\sigma) = \int r^\lambda\, e^{i(t\sigma, x)}\, dx = \int r^\lambda\, e^{i(\sigma, tx)} dx;$$

efectuînd transformarea de coordonate $tx = y$, $x = t^{-1}y$, $dx = t^{-n}dy$ $r = |x| = t^{-1}|y|$, obținem:

$$g_\lambda(t\sigma) = \int |y|_\lambda t^{-\lambda-n}\, e^{i(\sigma, y)}\, dy = t^{-\lambda-n}\, g_\lambda(\sigma).$$

Această înseamnă că $g_\lambda(\sigma)$ este omogenă cu grad de omogenitate $-\lambda - n$. Ca atare ea este de forma $g_\lambda(\sigma) = C_\lambda \rho^{-\lambda-n}$. Să calculăm constanta C_λ. Pentru aceasta utilizăm formula $(g_\lambda, \psi) = (2\pi)^n (r^\lambda, \varphi)$, în care facem *

$$\varphi(x) = e^{-r^2/2} = e^{-x_1^2/2} \ldots e^{-x_n^2/2}.$$

Atunci $\psi(\sigma) = (\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\rho_1^2}{2}}) \ldots (\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\rho_n^2}{2}}) = (2\pi)^{n/2}\, e^{-\frac{\rho^2}{2}}$ și obținem

$$C_\lambda (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int e^{\frac{\sigma^2}{2}}\, \rho^{-n-\lambda}\, d\sigma = (2\pi)^n \int r^\lambda\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dx.$$

* Am folosit formula $F[e^{-x^2/2}] = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\rho^2}{2}}$ ($n = 1$) v. I. M. Rijik și I. S. Gradstein, *Tabele*, pag. 281, formula (5.119).

Integralele din această egalitate se calculează trecînd în coordonate sferice: putem atunci împărți ambii membrii prin aria sferei unitate și obține integrale simple scriind $\rho^{n-1}\,d\rho$ în loc de $d\sigma$ și $r^{n-1}\,dr$ în loc de dx. Expresiile obținute se calculează cu ajutorul funcției Γ:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{-\lambda-1}\,d\rho = 2^{-\frac{\lambda}{2}-1}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}}\,r^{\lambda+n-1}\,dr = 2^{\frac{\lambda+n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Rezultă deci

$$C_\lambda = 2^{\frac{n}{2}+\frac{\lambda+n-2}{2}+\frac{\lambda}{2}+1}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = 2^{\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \tag{1}$$

și, prin urmare,

$$F[r^\lambda] = 2^{\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\,\rho^{-\lambda-n}. \tag{2}$$

Această egalitate, obținută pentru $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$, rămîne valabilă pe întreg domeniul de existență al funcției analitice r^λ, adică pentru toți $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$ (în punctele excluse, funcția r^λ are poli).

Împărțind formula (2) cu $\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$, ajungem la următoarea formulă simplă pentru transformata Fourier a funcției întregi

$$f_\lambda(r) = 2^{-\lambda/2}\,\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)};$$

$$F[f_\lambda(r)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,2^{\frac{\lambda+n}{2}}\,\frac{r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = (2\pi)f_{-\lambda-n}(\rho). \tag{2'}$$

Dezvoltarea lui r^λ în serie Taylor sau Laurent conduce la noi formule de transformate Fourier.

Știm din cap. I, § 4.6 că în vecinătatea unui punct regulat λ_0:

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\,r^{\lambda_0}\ln r + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,r^{\lambda_0}\ln^2 r + \ldots$$

De aici rezultă că:

$$\tilde{r}^\lambda = \tilde{r}^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\,F[r^{\lambda_0}\ln r] + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,F[r^{\lambda_0}\ln^2 r] + \ldots \tag{3}$$

Pe de altă parte, dezvoltînd funcția $\tilde{r}^\lambda = C_\lambda\,\rho^{-\lambda-n}$ în vecinătatea punctului λ_0 în serie Taylor, obținem:

$$C_\lambda\,\rho^{-\lambda_0-n} = C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + (\lambda-\lambda_0)\,[C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho] +$$

$$+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,[C''_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + 2C'_\lambda\,\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho] + \ldots \tag{4}$$

Comparînd coeficienții dezvoltării (4) și (3), obținem:

$$F[r^{-\lambda_0-n}\ln r] = C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + C_{\lambda_0}\,\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho, \tag{5}$$

$$F[r^{-\lambda_0-n}\ln^2 r] = C''_{\lambda_0}\,\rho^{-\lambda_0-n} + 2C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda-n}\ln\rho + C_{\lambda_0}\,\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho \tag{6}$$

ș.a.m.d.

În vecinătatea punctului singular $\lambda = -n-2m$:

$$r^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda+n+2m} + a_0 + a_1(\lambda+n+2m) + \ldots, \tag{7}$$

în care coeficienții $a_1, a_0, a_1, \ldots$ au expresiile (cap. I, § 4.6)

$$a_{-1} = \Omega_n\,\frac{\delta^{(2m)}(r)}{(2m)!},\quad a_0 = \Omega_n\,r^{-2n-m},\quad a_1 = \Omega_n\,r^{-2n-m}\ln r, \ldots \tag{8}$$

Aplicînd ambilor membri ai egalității (7) transformarea Fourier găsim:

$$\tilde{r}^\lambda = \frac{\Omega_n}{(2m)!}\,\frac{F[\,\delta^{(2m)}(r)]}{\lambda+n+2m} + \Omega_n\,F[r^{-2n-m}] +$$

$$+\Omega_n\,(\lambda+n+2m)\,F[r^{-2-n-m}\ln r] + \ldots \tag{9}$$

Pe de altă parte, în vecinătatea aceluiași punct

$$C_\lambda\,\rho^{-\lambda-n}=\left(\frac{C_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda+n+2m}+C_0^{(n+2m)}+C_1^{(n+2m)}(\lambda+n+2m)+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(\rho^{2m}+(\lambda+n+2m)\,\rho^{2m}\ln\rho+\ldots\right)=\frac{C_{-1}^{(n+2m)}\,\rho^{2m}}{\lambda+n+2m}+$$

(10)

$$+\left(C_1^{(n+2m)}\,\rho^{2m}\ln\rho+C_0^{(n+2m)}\,\rho^{2m}\right)+(\lambda+n+2m)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\,C_1^{(n+2m)}\,\rho^{2m}\ln^2\rho+C_0^{(n+2m)}\,\rho^{2m}\ln\rho+C_1^{(n+2m)}\,\rho^{2m}\right)+\ldots$$

Comparînd coeficienții corespunzători din dezvoltările (10) și (8), obținem :

$$\frac{\Omega_n}{(2m)!}\,F[\delta^{(2m)}(r)]=C_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m},$$

(11)

$$\Omega_n F[r^{-2n-m}]=C_{-0}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+C_1^{(n+2m)}\rho^{2m},$$

$$\Omega_n F\,[r^{-2m-n}\ln r]=\frac{1}{2}\,C_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln^2\rho+C_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+C_1^{(n+2m)}\,\rho^{2m},$$

. . . . . .

Aici coeficienții numerici $c_0^{(n+2m)}$, $c_0^{(n+2m)}$ ș.a.m.d. sînt coeficienții dezvoltării în serie Laurent ai funcției $C_\lambda(1)$ în vecinătatea punctului $\lambda=-n-2m$.

3.4. **Transformatele Fourier ale distribuțiilor cu suport compact.** Să arătăm că transformata Fourier a oricărei distribuții f cu suport compact, este, ca funcție de σ, o funcțională de tipul următor

$$(\overline{f(x)},\,e^{i(x,\sigma)}).$$

Această expresie trebuie înțeleasă în modul următor : funcția $e^{i(x,\sigma)}$ este înlocuită de o funcție de bază $\varphi_0(x)$, egală cu $e^{i(x,\sigma)}$ pe suportul lui f, și nulă în afara unui compact suficient de mare ; putem apoi aplica funcționala f :

$$(\bar{f},\,\varphi_0(x))=\overline{(f,\,\overline{\varphi_0(x)})}.$$

Numărul obținut astfel nu depinde de alegerea funcției $\varphi_0(x)$ cu proprietățile indicate (v. Anexa la cap. I, p. 3). Trebuie arătat că are loc egalitatea

$$\int\overline{f(x),\,e^{i(x,\sigma)}}\;\psi(\sigma)\,d\sigma=(2\pi)^n\,(f,\,\varphi)$$

pentru orice funcție test $\varphi(x)$, $\psi(\sigma)$ fiind transformata ei Fourier. Dar

$$(f,\,\varphi)=(f,\,\frac{1}{(2\pi)^n}\int\psi(\sigma)\,e^{-i(x,\sigma)}\,d\sigma).$$

Dacă putem trece funcționala f sub integrală, afirmația noastră va fi demonstrată :

$$(1)\quad(f,\,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\psi(\sigma)\,(f,\,e^{i(\sigma,x)})\,d\sigma=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\overline{(f(x),\,e^{i(\sigma,x)})}\,\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Rămîne doar de demonstrat legitimitatea introducerii funcționalei f sub integrală. Să arătăm mai întîi că aceasta este posibil dacă integrala este calculată pe un domeniu mărginit :

$$(f,\int_G\psi(\sigma)\,e^{-i(\tau,x)}\,d\sigma)=\int_G\psi(\sigma)\,(f,\,e^{-(\tau,x)})\,d\sigma.$$

Integrarea pe un domeniu mărginit G este limita sumelor integrale

$$s_N(x)=\sum_{j=1}^{N}\psi(\sigma_j)\,e^{-i(\sigma_j,x)}\Delta\sigma_j.$$

Sumele $s_N(x)$ converg către integrala pe domeniul G, uniform pe orice compact din spațiul variabilei x, ca și derivatele sale de orice ordin în raport cu x. De aceea transformînd aceste sume în funcții test, așa cum se procedează de obicei (înmulțind cu o funcție test fixată, egală cu 1 pe o vecinătate a suportului lui f), vom obține un șir ce converge în spațiul K. Rezultă deci că

$$(f,\,s_N)=\sum\psi(\sigma_j)\,(f,\,e^{-i(\sigma,x)})\Delta\sigma\,;$$

are drept limită

$$(f, \int_G \psi(\sigma)\, e^{-i(\sigma,x)}\, d\sigma).$$

Dar, pe de altă parte, (f, s_N) este o sumă integrală a funcției continue de σ:

$$\psi(\sigma)\,(f, e^{-i(\sigma,x)});$$

și are deci ca limită integrala acestei funcții. Prin urmare, egalitatea (1) este stabilită pentru un domeniu G mărginit.

În continuare, integrala pe întreg spațiul este limita integralelor pe domenii mărginite:

$$\int_{R^n} \psi(\sigma)\, e^{-i(\sigma,x)}\, d\sigma = \lim_{N\to\infty} \int_{|\sigma|<N} \psi(\sigma)\, e^{-i(\rho,x)}\, d\sigma.$$

Funcțiile de x, ce apar în membrul drept, converg către limita lor, adică către membrul stîng, uniform împreună cu toate derivatele, pe orice compact în spațiul variabilei x și, ca atare, este vorba de fapt de convergență în spațiul K. Prin urmare,

$$(f, \int_{R^n} \psi(\sigma)\, e^{-o(\sigma,x)}\, d\sigma) = \lim_{N\to\infty} (f, \int_{|\sigma|\leqslant N} \psi(\sigma)\, e^{-i(\sigma,x)}\, d\sigma) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{|\rho|<N} \psi(\sigma)\,(f, e^{-i(\sigma,x)})\, d\sigma = \int_{R^n} \psi(\sigma)\,(f, e^{-i(\sigma,x)})\, d\sigma,$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Ca exemplu să găsim transformata Fourier a distribuției $\delta(r-a)$, corespunzînd unei distribuții omogene de masă, de densitate 1, pe sfera U_a de rază a cu centrul în origine:

$$(\delta(r-a), \varphi) = \int_{U_a} \varphi(x)\, dx.$$

Distribuția $\delta(r-a)$ are suportul compact, din cele arătate transformata sa Fourier va fi funcția

$$F[\delta(r-a)] = (\delta(r-a), e^{i(x,\sigma)}) = \int e^{i(x,\sigma)}\, dx.$$

Trecînd la coordonate sferice ($r = |x| = a$, $\rho = |\sigma|$, θ — unghiul dintre vectorii x și σ), găsim

$$F[\delta(r-a)] = \int e^{ia\rho\cos\theta} a^{n-1} \sin^{n-1}\theta\, d\theta\, d\omega = a^{n-1}\,\Omega_{n-1} \int_0^\pi e^{ia\rho\cos\theta} \sin^{n-1}\theta\, d\theta,$$

$d\omega$ fiind elementul de arie al sferei în subspațiul $(n-2)$ dimensional, ortogonal vectorului ρ.

După cum se știe, integrala obținută se exprimă cu ajutorul funcțiilor Bessel *:

$$(2)\qquad F[\delta(r-a)] = a^{n-1}\,\Omega_{n-1}\,(a\rho)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho) = \Omega_{n-1}\, a^{n-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho).$$

Pentru n impar, $n = 2m+3$, funcția Bessel se poate exprima cu ajutorul funcțiilor trigonometrice (v. § 2.6, formula (7'))

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \sin z,$$

. . . . . .

$$J_{m+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^m\, z^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z}\,\frac{d}{dz}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\, J_{\frac{1}{2}}(z)\right).$$

Astfel, pentru $n = 2m+3$, avem:

$$F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1}\, a^{\frac{n}{2}}\, \rho^{1-\frac{n}{2}}\,(-1)^m\,(a\rho)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z}\,\frac{d}{dz}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{z}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right) z = a\rho.$$

(3)

În particular, pentru $n = 3$, $m = 0$

$$(4)\qquad F[\delta(r-a)] = 2\pi a^2 J_{\frac{1}{2}}(a\rho) = 4\pi a\, \frac{\sin a\rho}{\rho}.$$

* v. I. M. Rijik și I. S. Gradstein, *Tabele*, pag. 165, formula 3.27,3 (se pune $x = \cos\theta$).

Pe de altă parte, pentru orice $n = 2m + 3$ se poate utiliza formula cunoscută *:

$$(5) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{z\mathrm{d}z}\right)^m [z^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z)] = \sqrt{z}\, J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z.$$

Înlocuim în (2) argumentul $a\rho$ cu z; obținem atunci:

$$\rho^{n-2} \frac{1}{a} F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1} J_{\frac{n}{2}-1}(z)\, z^{\frac{n}{2}-1}.$$

și conform formulei (5),

$$\rho^{n-2} \left(\frac{\mathrm{d}}{z\mathrm{d}z}\right)^m \frac{1}{a} F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z,$$

sau, făcînd substituția inversă $z = a\rho$, $\mathrm{d}z = \rho\, \mathrm{d}a$,

$$\rho \left(\frac{\mathrm{d}}{a\,\mathrm{d}a}\right)^m \frac{1}{a} F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin a\rho.$$

Transformarea Fourier făcîndu-se în raport cu variabila x și derivarea în raport cu parametrul a, vom avea:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{a\mathrm{d}a}\right)^m \frac{1}{a} F[\delta(r-a)] = F\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{a\mathrm{d}a}\right)^m \frac{1}{a} \delta(r-a)\right].$$

Obținem deci formula interesantă:

$$(6) \qquad F\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{a\mathrm{d}a}\right)^m \frac{\delta(r-a)}{a}\right] = \Omega_{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\rho}{\rho}.$$

3.5. **Transformata Fourier ca limita unui șir de funcții.** Metoda de la §3.4 poate fi folosită și la căutarea transformatelor Fourier ale distribuțiilor oarecare (nu neapărat cu suport compact).

Fie f o distribuție oarecare. După cum știm (cap. I, §1.8), funcționala f se poate reprezenta ca limita unui șir de funcționale f_ν fiecare din acestea avînd suportul compact. Din cele arătate, transformata Fourier a funcționalei f_ν este o funcție $g_\nu(s)$. Cum transformarea Fourier duce șirurile convergente în șiruri convergente se poate obține transformata Fourier căutată a funcționalei f, ca limita (în sensul convergenței din spațiul Z') a șirului de funcții $g_\nu(s)$ pentru $\nu \to \infty$.

* I. M. Rijik și I. S. Gradstein, *Tabele*, pag. 359, formula (6.482, 3).

În particular, pentru orice funcție (uzuală) $f(x)$ (putînd crește oricît de repede), transformata Fourier poate fi definită ca limita (în sensul convergenței în Z') a șirului de funcții

$$(1) \qquad g_\nu(\sigma) = \int_{|a| \leqslant \nu} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}x.$$

Dacă funcția $f(x)$ crește cel mult polinomial, și dacă definește o funcțională pe spațiul S, atunci integrala (1) converge către transformata Fourier a funcției $f(x)$ și în sensul convergenței spațiului S' (adică pentru toate funcțiile test $\psi(\sigma) \in S$). În particular, funcționalele $g_\nu(\sigma)$ converg către limita $g(\sigma)$, pentru toate funcțiile test cu suport compact, în sensul convergenței din spațiul K'. Am mai întîlnit o astfel de situație în exemplele din cap. I, § 2.5.

§ 4. Transformarea Fourier și ecuațiile diferențiale

4.1. **Observații preliminare.** Transformata Fourier, în forma sa clasică este una din metodele importante de rezolvare a problemelor referitoare la ecuațiile diferențiale. Dar domeniul de aplicabilitate a metodei transformării Fourier este restrîns în esență la clasa funcțiilor integrabile pe întreg spațiul, sau la cele de putere integrabilă. Utilizarea transformatei Fourier în planul complex permite includerea în domeniul de aplicabilitate a transformării Fourier și a funcțiilor cu creștere exponențială, dar atunci, în mod obligatoriu, aceste funcții se anulează pentru valorile negative ale argumentului. Aceasta se referă la transformarea Laplace *, ea însăși o modificare a transformării Fourier. Pentru transformarea Laplace bilaterală, luată drept punct de plecare în cartea lui Van del Pol **, clasa funcțiilor admisibile cuprinde funcțiile ce cresc exponențial pentru $x \to +\infty$, sînt diferite de zero pentru $x < 0$, dar cu descreștere exponențială, ceea ce asigură prezența unei benzi în planul complex, în care transformata Laplace există. O altă metodă elegantă pentru dezvoltarea calculului operațional a fost dezvoltată de I. Mikusinski ***; această metodă (dezvoltată pînă în prezent doar pentru funcții de o singură variabilă) permite considerarea funcțiilor cu creștere arbitrară pentru $x \to +\infty$, identic nule pentru x negativi.

* v. de exemplu H. S. Carslaw și D. Eger, *Metode operaționale în matematica aplicată* (lb. engleză), London Oxford University Press, 1948.

* B. Van der Pol și Bremmer, *Calcul operațional cu ajutorul transformatei Laplace bilaterale* (lb. engleză), Cambridge, 1950.

** Jan Mikusinski, Calcul operețional, Pergamon Press New York, 1959.

Metoda transformării Fourier a distribuțiilor, expusă în volumul de față nu impune nici o condiție creșterii funcțiilor, atît pentru $x \to \infty$, cît și pentru $x \to -\infty$ și este valabilă pentru oricîte variabile. Este deci firesc ca această metodă să permită, în particular, rezolvarea tuturor tipurilor de probleme la care se puteau aplica transformarea Fourier clasică, transformarea lui Laplace sau metoda lui Mikusinski, precum și numeroase alte probleme care nu erau accesibile acelor metode.

Ne vom mărgini în acest volum la considerarea numai a unor exemple simple.

4.2. **Ecuația iterată a lui Laplace** $\Delta^m u = f$. Soluția acestei ecuații va fi găsită dacă se cunoaște soluția fundamentală E, căci atunci $u = f * E$. Soluția fundamentală este soluția ecuației

$$\Delta^m E = \delta(x). \tag{1}$$

Vom căuta soluția fundamentală în spațiul K'. Aplicînd transformarea Fourier ecuației (1), obținem:

$$(-1)^m \rho^{2m} V = 1 \qquad (\rho^2 = \sum \sigma_j^2), \tag{2}$$

unde cu V s-a notat transformata Fourier a distribuției E. Problema s-a redus deci la rezolvarea ecuației (2).

Dacă $2m < n$, atunci soluția va fi funcția (local integrabilă) $\frac{(-1)^m}{\rho^{2m}}$. Dacă $n = -2m < 0$ nu este un pol al funcției analitice ρ^λ (cap. I, § 3.9) — reamintim că polii funcției ρ^λ sînt situați în punctele $-n, -n-2, \ldots$ atunci soluția este funcționala $(-1)^m \rho^{-2m}$, ce se obține trecînd la limită în egalitatea $\rho^{2m} \rho^\lambda = \rho^{2m+\lambda}$ pentru $\lambda \to -2m$.

Fie, în sfîrșit, $\lambda = -2m$ un pol al funcției analitice ρ^λ. Considerăm dezvoltarea în serie Laurent în jurul acestui punct al funcției ρ^λ:

$$\rho^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda + 2m} + a_0 + a_1(\lambda + 2m) + \ldots, \tag{3}$$

în care $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ sînt distribuții (cap. I, § 4.6).

Înmulțim, această egalitate cu ρ^{2m} termen cu termen și trecem apoi la limită pentru $\lambda \to -2m$. Membrul stîng, ca mai sus, are

limita 1. În membrul drept, toți termenii începînd cu al treilea, prin trecere la limită se anulează; al doilea termen $\rho^{2m} a_0$ rămîne constant, iar primul, dacă se presupune că $\rho^{2m} a_{-1} \neq 0$ ar tinde la infinit. Dar aceasta ar contrazice relația limită, în care toți ceilalți termeni sînt finiți, și deci deducem că $\rho^{2m} a_{-1} = 0$ și, prin urmare,

$$\rho^{2m} a_0 = 1.$$

Astfel, în acest caz, soluția ecuației $(-1)^m \rho^{2m} V = 1$ este $(-1)^m a_0$, în care a_0 este partea regulată a seriei Laurent în $\lambda = -2m$ *). În primul și în al doilea caz, rezultatul transformării Fourier inverse, conform formulei (2) și din § 3.3, este funcția $C_{2m} r^{2m-n}$. În al treilea caz, conform formulei (5) din § 3.3, soluția este funcția

$$A r^{2m-n} \ln r + B r^{2m-n}.$$

Dar, în cazul de față, al doilea termen se poate omite, căci el verifică ecuația $\Delta^m r^{2m-n} = 0$. Prin urmare, soluția fundamentală E este

$$E(x) = \begin{cases} C r^{2m-n} \ln r, & \text{dacă } 2m > n \text{ și } n \text{ par} \\ C r^{2m-n} & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

4.3. **Ecuația undelor în spațiul cu un număr impar de dimensiuni**. Undele

$$e^{-i[(\sigma, x) \pm \rho t]} \quad (\rho = |\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}),$$

constituie soluții particulare ale ecuației undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

cu ajutorul cărora se poate obține orice soluție, sub forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi_1(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x) + i\rho t}\, d\sigma + \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi_2(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x) - i\rho t}\, d\sigma.$$

*) Acest coeficient este distribuția $\Omega_n r^{-n-2m}$. Dar forma sa explicită nu joacă aici nici un rol.

Soluția $u(x, t)$ trebuie să fie determinată din condițiile inițiale pe care le alegem (v. cap. I, § 5.4) sub forma

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \delta(x). \tag{2}$$

Prima din aceste condiții conduce la ecuația

$$\int [(\psi_1\sigma) + \psi_2(\sigma)]\, e^{-i(\sigma, x)} d\sigma = 0,$$

care este verificată, dacă $\psi_2(\sigma) \equiv -\psi_1(\sigma) \equiv \frac{1}{2i}\psi(\sigma)$, în așa fel încît

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} \sin \rho t \, d\sigma = F^{-1}[\psi(\sigma) \sin \rho t]. \tag{3}$$

A doua condiție inițială poate fi scrisă

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} \rho d\rho = \delta(x),$$

sau

$$F^{-1}[\rho\psi(\sigma)] = \delta(x).$$

Rezultă că

$$\rho\psi(\sigma) = \widetilde{\delta(x)} = 1$$

și, prin urmare, conform cu (3)

$$u(x, t) = F^{-1}\left[\frac{\sin \rho t}{\rho}\right].$$

Dar transformata Fourier inversă a lui $\frac{\sin \rho t}{\rho}$ o cunoaștem deja; conform formulei (6) de la § 3.4, pentru $n = 2m + 3$

$$F^{-1}\left[\frac{\sin \rho t}{\rho}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-1}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\delta(r - t)}{t}$$

Obținem deci soluția problemei Cauchy cu data inițială $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f(x)$,

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-1}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\delta(r - t)}{t} * f(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-1}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m t^{n-2} \Omega_n M_t[f],$$

unde $M_t[f]$ este media funcției $f(x - \xi)$ pe bila $|\xi| \leqslant t$.

În particular, pentru $n = 3$, $m = 0$

$$u(x, t) = t\, M_t[f].$$

Cu ajutorul metodei uzuale de coborîre se poate obține soluția ecuației undelor în spațiul cu un număr par de dimensiuni *.

4.4. Legătura între soluția fundamentală a unei ecuații și soluția fundamentală a problemei Cauchy a aceleiași ecuații. Conform definiției, soluția fundamentală a ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f, \tag{1}$$

este o distribuție $E(x, t)$ (din spațiul K'), verificînd ecuația

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) = \delta(x, t). \tag{2}$$

Soluția fundamentală a soluției problemei Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \tag{3}$$

este o distribuție $u(x, t)$, definită pentru $t \geqslant 0$, pe funcțiile test $\varphi(x)$ (depinzînd de t ca parametru), verificînd ecuația (2) și reducîndu-se la $\delta(x)$ pentru $t = 0$.

* v. Courant și D. Hilbert, *Metodele fizicii matematice*, tom II, Springer Verlag (în lb. germană).

Cunoscînd distribuţia $u(x, t)$, se poate construi soluţia fundamentală $E(x, t)$; anume are loc teorema:

Presupunem cunoscută soluţia fundamentală $u(x, t)$ a problemei Cauchy pentru ecuaţia (3). *Fie*

$$E(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0 \\ u(x, t) & \text{pentru } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Atunci $E(x, t)$ este o soluţie fundamentală a ecuaţiei (1).

Definiţia (4) cere încă anumite clarificări pentru $t \geqslant 0$. Noi trebuie să găsim o distribuţie definită pe funcţiile test, depinzînd de x şi t, iar $u(x, t)$ este definită ca o funcţională pe funcţiile test ce depind doar de x, t fiind un parametru. Dăm distribuţiei $u(x, t)$ următorul sens ca distribuţie în variabilele x şi t:

$$(u(x, t), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty (u(x, t)\, \varphi(x, t))\, dt.$$

Sub integrală, $u(x, t)$ se aplică pentru t fixat, funcţiei test $\varphi(x, t)$ ca funcţie de x pentru aceeaşi valoare a lui t; rezultatul este o funcţie cu suport compact în t, şi integrarea în raport cu t are sens.

Să arătăm că distribuţia obţinută $E(x, t)$ este soluţia ecuaţiei (2). Este suficient de demonstrat că ea verifică ecuaţia dual㠠(obţinută aplicînd ecuaţiei (2) transformarea Fourier în raport cu x şi t). Variabilele $x_1 \ldots x_n$ devenind prin transformarea Fourier $\sigma_1 \ldots, \sigma_n$ iar t devenind σ_0, ecuaţia dual㠠se scrie

$$[-i\sigma_0 - P(\sigma)]\, V(\sigma, \sigma_0) = 1. \tag{5}$$

Să efectuăm, pentru început, transformarea Fourier asupra lui $E(x, t)$, doar în variabila x, lăsînd pe t fixat. Notînd cu $v(\sigma, t)$ rezultatul acestei transformări, obţinem din (3):

$$\begin{cases} v(\sigma, t) = 0 \ (t < 0), \\ v(\sigma, 0) = 1 \ (t = 0), \\ \dfrac{d}{dt} v(\sigma, t) - P(\sigma)\, v(\sigma, t) = 0 \ (t > 0). \end{cases} \tag{6}$$

Derivarea $\dfrac{d}{dt}$ este înţeleasă în sensul uzual; ea poate fi înlocuită printr-o derivare în sensul distribuţiilor, ţinînd seama de saltul lui $v(\sigma, t)$ pentru $t = 0$ (cap. I, § 2.2, ex. 2); ecuaţia (6) poate fi deci înlocuită cu ecuaţia

$$\frac{d}{dt} v(\sigma, t) - P(\sigma)\, v(\sigma, t) - \delta(\sigma) = 0,$$

unde $\dfrac{d}{dt}$ reprezintă derivarea în sensul distribuţiilor. Efectuînd o transformare Fourier în raport cu t, ajungem la ecuaţia dorită,

$$-i\sigma_0\, V(\sigma, \sigma_0) - P(\sigma) V(\sigma, \sigma_0) = 1.$$

4.5. **Calculul operaţional clasic.** În calculul operaţional clasic se consideră ecuaţii diferenţiale şi sisteme de forma

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

pentru $t > 0$ cu anumite condiţii iniţiale (pentru $t = 0$) şi la limită (în domeniul variabilei x). Cu ajutorul transformatei Laplace în raport cu t, problema se reduce la o ecuaţie diferenţială doar în raport cu x (sau la o problemă algebrică în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare). Considerăm această problemă din punct de vedere al teoriei distribuţiilor. Introducem distribuţia $U(x, t)$ (distribuţie în variabila t depinzînd de x ca parametru), egală cu $u(x, t)$ pentru $t > 0$ şi nulă pentru $t < 0$. Cum, la trecerea de la $t > 0$ la $t < 0$, funcţia $u(x,t)$ are un salt egal cu valoarea iniţială dată, $u(x, 0)$, avem:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, 0)\delta(t).$$

Deci $U(x, t)$ verifică ecuaţia (sau sistemul)

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x, t) + u(x, 0)\delta(t). \tag{1}$$

Efectuînd o transformare Fourier în raport cu t și notînd noua variabilă cu $p = p_1 + ip_2$, obținem ecuația

$$-ipV(x, p) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x, p) + u(x, 0) \cdot 1. \tag{2}$$

Pentru problemele corect puse, ecuația obținută în condițiile la limită în raport cu x dat, are o singură soluție $V(x, p)$, care va fi o funcție analitică de p (în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare chiar o funcție rațională de p), avînd anumite singularități (și eventual neuniformă). Avînd funcția $V(x, p)$ se poate construi familia de funcționale analitice de forma

$$(V, \psi) = \int_\Gamma V(x, p)\, \psi(p)\, dp, \tag{3}$$

în care Γ este un contur fixat, care evită singularitățile funcției $V(x, p)$ și, este echivalent axei reale, adică astfel încît

$$\int_\Gamma \psi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma,$$

pentru orice funcție test $\psi(s)$. De pildă, orice dreaptă paralelă axei reale din planul variabilei s, care nu întîlnește punctele singulare ale lui $V(x, p)$ poate fi un astfel de contur.

Fiecare din aceste funcționale definește o soluție a ecuației (2), iar transformata Fourier inversă a unei astfel de funcționale, o soluție a ecuației (1). Numai că, în general, aceste soluții nu se anulează pentru $t < 0$.

A alege o funcțională analitică (3), a cărei transformată Fourier să se anuleze pentru $t < 0$ este, în cazul general, dificil.

Presupunem că funcția $V(x, p)$ are următoarele proprietăți speciale:

a) *Deasupra dreptei* $\mathrm{Im}\, p = p_2^0$, *funcția $V(x, p)$ nu are puncte singulare.*

b) *În domeniul indicat, funcția $V(x, p)$ are o majorantă $W(p_1)$ integrabilă:*

$$|V(x, p)| \leqslant W(p_1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(p_1)\, dp_1 < \infty.$$

Atunci funcționala analitică

$$(V, \psi) = \int_{-\infty + ip_2}^{\infty + ip_2} V(x, p)\, \psi(p)\, dp \quad (p_2 > p_2^0)$$

este transformata Fourier a unei funcții $u(x, t)$ ce se anulează pentru $t < 0$ și verifică ecuația (sistemul) (1).

Ipotezele acestei teoreme sînt condițiile uzuale de existență a transformatei Laplace inverse. Transformata Fourier a funcționalei V este dată de formula (2), § 2.5:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ip_2}^{\infty + ip_2} V(x, p)\, e^{-ipt} dp.$$

Faptul că $u(x, t)$ se anulează identic pentru $t < 0$ rezultă din evaluarea

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{p_2 t} \int_{-\infty}^{-\infty} W(p_1)\, dp_1,$$

dacă $p_2 \to +\infty$.

Fie apoi dată funcția $V_1(x, p)$ ce poate fi reprezentată sub forma

$$V_1(x, p) = Q(p) V(x, p), \tag{4}$$

unde $V(x, p)$ verifică condițiile de mai înainte, iar $Q(p)$ un anumit polinom.

Ecuația (4) este echivalentă ecuației

$$u_1(x, t) = Q\left(i\frac{d}{dt}\right) u(x, t),$$

în care $u_1(x, t)$ și $u(x, t)$ sînt transformatele Fourier inverse ale funcțiilor $V_1(x, p)$ și $V(x, p)$; vedem că în acest caz și $V_1(x, p)$ este transformata Fourier a unei funcționale avînd suportul conținut în semiaxa $t \geqslant 0$.

Capitolul III

TIPURI PARTICULARE DE DISTRIBUȚII

§ 1. Distribuții concentrate pe suprafețe netede

Cel mai simplu exemplu de distribuție concentrată pe o suprafață este distribuția

$$(f, \varphi) = \int_S f(x)\varphi(x)\,d\sigma, \tag{1}$$

S fiind o suprafață dată, $d\sigma$-elementul său de arie, $f(x)$ o funcție fixată, iar $\varphi(x)$ o funcție test arbitrară *. Un exemplu întrucîtva mai complicat se obține dacă se înlocuiește funcția de sub integrală printr-o expresie conținînd derivatele funcției $\varphi(x)$.

În acest paragraf vom studia alte funcționale importante, concentrate pe suprafețe de dimensiune $< n$, situate în spațiul n-dimensional. În cazul $n = 1$, după cum știm, exemple de funcționale concentrate într-un singur punct sînt: distribuția δ și derivatele sale. Mai mult, după cum se va arăta în volumul doi, orice funcțională avînd suportul redus la un singur punct este o combinație liniară a distribuției δ și a derivatelor sale. În cazul $n > 1$, atunci cînd suprafața S este $(n-1)$-dimensională și este dată de ecuația

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2}$$

un rol analog îl joacă distribuțiile, pe care le vom nota $\delta(P)$, $\delta'(P)$ ș.a.m.d.; despre ele va fi vorba în cele ce urmează.

* În acest capitol funcțiile test se presupun cu suport compact și indefinit derivabile, adică se consideră numai spațiul K.

Dacă $P \equiv x_1$, adică dacă S este hiperplanul $x_1 = 0$, este natural de a scrie că *

$$(\delta(x_1), \varphi(x)) \equiv \int \delta(x_1)\varphi(x)\,dx = \int\left[\int \delta(x_1)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\right]dx_2,\ldots,dx_n =$$

$$= \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2, \ldots, dx_n,$$

adică este natural de a defini distribuția $\delta(x_1)$ prin **

$$\int \delta(x_1)\varphi(x)\,dx = \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n. \tag{3}$$

Din același motiv, distribuția $\delta^{(k)}(x_1)$ este firesc a fi definită prin formula:

$$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int \varphi^{(k)}_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n. \tag{4}$$

Fie acum $P(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție arbitrară suficient de netedă, astfel încît, pentru $P = 0$ să avem

$$\operatorname{grad} P \neq 0 \tag{5}$$

(adică pe suprafața $P = 0$ nu sînt puncte singulare). În acest caz, distribuția $\delta(P)$ se poate defini în modul următor.

Într-o vecinătate suficient de mică U a unui punct arbitrar al suprafeței $P = 0$, putem introduce noi coordonate, astfel încît suprafața $P = 0$ să fie dată prin anularea unuia dintre ele. Pentru aceasta punem $P = u_1$, iar celelalte coordonate $u_2, \ldots, u_n$ le alegem supuse la singura condiție ca jacobianul $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ al variabilelor $x_1, \ldots, x_n$, în raport cu variabilele $u_1, \ldots, u_n$ să fie diferit de zero (aceasta este întotdeauna posibil datorită condiției $\operatorname{grad} P \neq 0$ pe $P = 0$). Fără a scădea generalitatea se poate admite că funcția test $\varphi(x)$ are suportul conținut în vecinătatea U***. Să efectuăm în „in-

* Folosim notația introdusă la finele § 1.3, cap. I.

** Prin aceasta vrem să spunem că $\delta(x_1) \times 1(x_2, \ldots, x_n)$, unde $\delta(x_1)$ este distribuția delta pe variabila x_1, iar $1(x_2, \ldots, x_n)$, funcția de variabilele $(x_2, \ldots, x_n)$ identic egală cu 1 (v. cap. I, § 5.1).

*** v. Completarea 1 la cap. I, p. 2.

tegrala" $\int \delta(P)\varphi\,dx$, pe care dorim să o definim, schimbarea de variabile:

$$\int \delta(P)\varphi(x)\,dx = \int \delta(P)\varphi_1(u)\,D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}du = \int \delta(u_1)\psi(u)\,du,$$

unde

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad \psi = \varphi_1(u)D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Se vede de aici că distribuţia $\delta(P)$ trebuie definită prin formula

$$(\delta(P), \varphi) = \int \delta(P)\varphi\,dx = \int \psi(0, u_2, \ldots, u_n)\,du_2 \ldots du_n. \tag{7}$$

Ultima integrală se calculează pe suprafaţa $P = 0$, ceea ce ne permite să spunem că funcţionala $\delta(P)$ este concentrată pe suprafaţa $P = 0$. La fel de firesc este să definim $\delta^{(k)}(P)$ prin

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi\,dx = (-1)^k \int \psi_{u_1}^{(k)}(0, u_2, \ldots, u_n)\,du_2 \ldots du_n, \tag{8}$$

funcţia $\psi(u)$ fiind definită de (6), iar integrala din membrul drept din (8) este calculată de asemenea pe suprafaţa $P = 0$.

Pentru ca aceste formule să aibă sens este suficient de a presupune că funcţia $P(x)$ are derivate continue pînă la ordinul $k + 1$.

La o primă vedere s-ar părea că definiţiile (6) şi (7) depind esenţialmente de alegerea sistemului de coordonate. Dar, de fapt nu este aşa: arătăm că distribuţiile $\delta(P)$, $\delta'(P)$, ... sînt unic determinate chiar de funcţia P. Cel mai bine ar fi de a le defini în formă invariantă deci în care coordonatele particulare, $u_1, \ldots, u_n$ nu intervin, şi de a utiliza pentru aceasta consideraţii în termeni de teoria formelor diferenţiale. Cititorul care ar dori să evite formele diferenţiale poate utiliza formulele finale, care vor fi date mai jos. Totuşi, limbajul formelor diferenţiale este deosebit de potrivit şi îl vom folosi sistematic în cursul acestui paragraf. Minimul necesar privind formele diferenţiale este dat în § 1.1.

Dacă sub semnul integral ce figurează în membrul drept al formulei (7) revenim la vechile coordonate şi la vechile notaţii, găsim o combinaţie liniară a funcţiei $\varphi(x)$ şi a derivatelor sale, cu coeficienţi depinzînd de x. Vom arăta în § 1.7 că orice funcţională f, de forma

$$(f, \varphi) = \sum_{i_1+\ldots+i_n\leqslant k} \int_{P=0} a_{i_1\ldots i_k}(x)\,\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}\varphi(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}\,dx, \tag{9}$$

se exprimă cu ajutorul distribuţiilor $\delta(P)$, $\delta'(P)$, ş.a.m.d. în modul următor:

$$(f, \varphi) = \sum_{j=0}^{k} \int b_j(x)\delta^{(j)}(P)\varphi\,dx. \tag{10}$$

În scrierea (10) apar doar $k + 1$ derivate, pe cîtă vreme în scrierea (9), în general, mult mai multe. Prezentarea (10) are şi avantajul că este unică: dacă $f = 0$, atunci $b_0(x) = \ldots = b_k(x) = 0$, ceea ce nu se poate afirma despre coeficienţii $a_{i_1\ldots i_n}(x)$.

Să dăm acum formulele pe care le vom demonstra mai tîrziu. În aceste formule funcţia P trebuie să fie mai regulată decît am presupus pînă acum; de aceea vom presupune că P este indefinit derivabilă.

Să notăm cu $\theta(P)$ funcţia caracteristică a domeniului $P > 0$:

$$\theta(P) = \begin{cases}0, & P < 0,\\ 1, & P \geqslant 0,\end{cases} \quad (\theta(P), \varphi) = \int_{P>0} \varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Atunci are loc relaţia:

$$\theta'(P) = \delta(P), \tag{12}$$

care trebuie înţeleasă în sensul următor:

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P). \tag{12'}$$

Apoi este valabilă formula „de derivare a lui $\delta^{(k)}(P)$, ca o funcţie compusă":

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P) = \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Sînt de asemenea adevărate următoarele identități, ce leagă distribuția $\delta(P)$ de derivatele sale:

$$P\delta(P) = 0, \tag{14}$$

$$P\delta'(P) + \delta(P) = 0, \tag{15}$$

$$P\delta''(P) + 2\delta'(P) = 0, \tag{16}$$

. . . . . .

$$P\delta^{(k)}(P) + k\delta^{(k-1)}(P) = 0, \tag{17}$$

. . . . . .

Dacă suprafețele $P = 0$ și $Q = 0$ (funcția Q verificînd aceleași condiții ca și P) nu se intersectează, atunci

$$\delta(PQ) = P^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\delta(P). \tag{18}$$

În particular, dacă funcția $a(x)$ nu se anulează, atunci

$$\delta(aP) = a^{-1}\delta(P). \tag{19}$$

Se poate deduce de aici că,

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P). \tag{20}$$

Cele spuse mai sus se referă la funcționalele concentrate pe o suprafață $(n-1)$ dimensională în spațiul n-dimensional *. Fie acum o suprafață avînd o dimensiune mai mică. Să presupunem că ea este dată de ecuațiile

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{21}$$

în care $P_1, \ldots, P_k$ sînt funcții suficient de netede și astfel încît suprafețele $P_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ sînt în poziție regulată, adică astfel încît, în vecinătatea fiecărui punct al suprafeței S se pot alege funcțiile $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ drept primele k coordonate locale, celelalte $u_{k+1}, \ldots, u_n$ fiind alese astfel ca jacobianul $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ să fie diferit de zero. Ca mai înainte, putem defini distribuția $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ și

* În mod uzual, o astfel de suprafață se numește hipersuprafață. (Nota trad.).

derivatele sale $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots P_k^{\alpha_k}}$. Anume, dacă dorim să aibă loc identitatea

$$\int \delta(P_1, \ldots, P_k)\varphi \, dx = \int \delta(u_1, \ldots, u_k)\varphi_1(u) D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du =$$

$$= \int \delta(u_1, \ldots, u_k)\psi(u_1, \ldots, u_n)\, du_1, \ldots, du_n,$$

unde

$$\varphi_1(u) = \varphi(x) \text{ și } \psi(u) = \varphi_1(u) D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \tag{22}$$

atunci trebuie să punem:

$$\int \delta(P_1, \ldots, P_k)\varphi \, dx = \int \psi(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)\, du_{k+1} \ldots du_n; \tag{23}$$

și din aceleași motive trebuie să punem:

$$\int \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}\delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} \int \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}\psi(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_k^{\alpha_k}} du_{k+1} \ldots du_n \tag{24}$$

Vom arăta în § 1.9 că aceste definiții nu depind de alegerea sistemului de coordonate. Pentru aceste distribuții sînt adevărate următoarele identități:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \tag{25}$$

$$P_i\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0, \tag{26}$$

$$P_iP_j\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0, \tag{27}$$

. . . . . .

$$P_1P_2 \ldots P_k\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0, \tag{28}$$

precum și identitățile ce se obțin prin derivare formală a acestora.

1.1. **Informații introductive privind formele diferențiale** *. O formă diferențială de ordin k într-un domeniu al spațiului n-dimensional, de coordonate $x_1, \ldots, x_n$ este o expresie de forma

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_k},$$

sumarea făcîndu-se după toate aranjamentele de n obiecte luate cîte k. Funcțiile $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ se presupun funcții indefinit derivabile de coordonate. Două forme de grad k sînt egale dacă se transformă una în alta ținînd seama că produsele diferențialelor verifică formula

$$\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_i \tag{1}$$

și după reducerea termenilor asemenea.

Rezultă în particular că orice termen ce conține două diferențiale cu același indice este nul. În afară de aceasta, utilizînd regula (1) de anticomutativitate, orice formă se poate scrie într-un mod „canonic", astfel ca în fiecare termen al său indicii să apară în ordine crescătoare.

Vom spune că o formă are *suport compact*, dacă toți coeficienții săi sînt funcții cu suport compact.

Produsul exterior al formelor $\sum a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_k}$ și $\sum b_{j_1 \ldots j_m}(x)\, \mathrm{d}x_{j_1} \ldots \mathrm{d}x_{j_m}$ este forma de grad $k+m$, ce se obține prin înmulțirea algebrică formală a celor două forme; rezultatul se poate bineînțeles simplifica, folosind regula (1) și reducerea termenilor asemenea **.

Rezultă în particular, din această definiție, că, anticomutativitatea se păstrează și pentru produsul a două forme de gradul 1, $\alpha = \sum a_j(x)\, \mathrm{d}x_j$ și $\beta = \sum b_k(x) \mathrm{d}x_k$; într-adevăr,

$$\alpha\beta = \sum_{j,k} a_j(x) b_k(x)\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_k = -\sum_{j,k} a_j(x) b_k(x)\, \mathrm{d}x_k\, \mathrm{d}x_j = -\beta\alpha.$$

* Nu vom avea nevoie de teoria formelor diferențiale în forma sa cea mai generală. Peste tot unde va fi posibil vom face simplificări. Cititorul care dorește să se familiarizeze mai bine cu conceptele introduse aici poate să consulte, de exemplu, cartea lui P.K. Raşevski, *Teoria geometrică a ecuațiilor cu derivate parțiale* (lb. rusă) sau cea a lui G. de Rham, *Varietăți diferențiabile, lb. franceză*, Hermann Paris, 1955.

** Presupunem desigur că coeficienții $a_{i_1 \ldots i_n}$ și $b_{j_1 \ldots j_m}$ comută între ei precum și cu diferențialele.

Să vedem acum cum se transformă o formă diferențială la o schimbare diferențială de coordonate $x_i = x_i(x'_1, \ldots, x'_n)$. Avem:

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \mathrm{d}x'_j$$

și

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{j} a_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial x'_{j_k}}\, \mathrm{d}x'_{j_1} \ldots \mathrm{d}x'_{j_k}.$$

Termenii din suma obținută, în care aceeași diferențială apare de două ori, se anulează. Termenii care conțin aceleași diferențiale pot fi reuniți, utilizînd regula $\mathrm{d}x'_j \mathrm{d}x'_k = -\mathrm{d}x'_k \mathrm{d}x'_j$; după aceasta se vede ușor că pentru $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, coeficientul lui $\mathrm{d}x'_{j_1} \ldots \mathrm{d}x'_{j_k}$ este înmulțit cu jacobianul

$$D\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} \ldots x_{i_k} \\ x'_{j_1} & x'_{j_2} \ldots x'_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Obținem astfel

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_k} = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} a'_{j_1 \ldots j_k}\, \mathrm{d}x'_{j_1} \ldots \mathrm{d}x'_{j_k}, \tag{2}$$

unde

$$a'_{j_1 \ldots j_k} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} D\begin{pmatrix} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \\ x'_{j_1} \ldots x'_{j_k} \end{pmatrix} a_{i_1 \ldots i_k}. \tag{3}$$

În particular, pentru formele de grad n, care se reduc întotdeauna la un singur termen, avem:

$$a\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = aD\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x'_1 \ldots x'_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x'_1 \ldots \mathrm{d}x'_n. \tag{4}$$

Să remarcăm că *aceasta este formula după care se schimbă integrandul într-o integrală multiplă la o schimbare de variabile.* Acesta este motivul pentru care, pentru astfel de schimbări, se poate utiliza

tehnica formelor diferențiale. De exemplu, pentru orice integrală dublă, dacă $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, atunci

$$dx = \varphi'_u\,du + \varphi'_v\,dv;\ dy = \psi'_u\,du + \psi'_v\,dv,$$

$$dx\,dy = (\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u)\,du\,dv.$$

Diferențiala exterioară a formei diferențiale

$$\alpha = \sum a_{i_1\ldots i_k}\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$$

se definește ca fiind forma diferențială de grad $k+1$,

$$d\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_k}\left(\sum_i \frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_i}\right) dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}, \tag{5}$$

în care, bineînțeles, se pot face simplificări utilizînd regula $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$.

De pildă, diferențiala exterioară a unei forme diferențiale de ordinul zero, adică a unei funcții scalare $a(x)$ este diferențiala uzuală, adică forma de gradul 1, $\sum \frac{\partial a}{\partial x_i}\,dx_i$ (ai cărei coeficienți sînt componentele gradientului lui $a(x)$). Diferențiala exterioară a 1-formei $\sum a_i(x)\,dx_i$ este 2-forma:

$$\sum_{i<j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) dx_i\,dx_j$$

(dacă coeficienților formei $\sum a_i dx_i$ le facem să corespundă vectorul $a = \{a_i\}$, atunci coeficienții diferențialei exterioare sînt componentele rotorului vectorului a). Diferențiala $(n-1)$-formei

$$\sum a_j(x)\,dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n$$

este n-forma:

$$\left\{\sum(-1)^{j+1}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\right\} dx_1\ldots dx_n.$$

Se deduce ușor din (1) că, pentru orice formă α avem

$$d\,d\alpha = 0. \tag{6}$$

Să considerăm acum problema integrării formelor diferențiale pe deschiși și pe varietăți. Convenim că n-forma $\alpha = a(x)dx_1\ldots dx_n$ se integrează pe un deschis G din spațiul R^n conform regulii obișnuite pentru integralele multiple.

Dorim acum să definim integrala unei forme de gradul k pe o mulțime k-dimensională. În prealabil cîteva cuvinte despre orientarea domeniilor și suprafețelor.

Dacă într-o anumită vecinătate V (de dimensiune oarecare m) este dat un sistem local de coordonate $u_1, \ldots, u_m$, spunem că acestea definesc *orientarea* vecinătății V. Un alt sistem de coordonate locale $v_1, \ldots, v_m$ definește *aceeași orientare*, dacă jacobianul coordonatelor v_i, exprimate ca funcții de u_i este pozitiv. Există și orientarea *opusă* a lui V. Ea este definită de orice sistem local de coordonate $w_1, \ldots, w_m$ pentru care jacobianul în raport cu $u_1, \ldots, u_m$ este negativ.

Domeniul, sau suprafața Γ (de dimensiune m) se numește *orientabil*, dacă în vecinătatea tuturor punctelor sale se pot defini orientări concordante, în așa fel încît, în vecinătățile ce se intersectează, coordonatele locale ale fiecărei vecinătăți, să definească pe intersecție aceeași orientare. Nu vom considera suprafețe neorientabile (de exemplu banda lui Möbius).

Fie acum o vecinătate m-dimensională U, conținută într-o vecinătate $(m+1)$-dimensională V și care separă pe aceasta din urmă în două părți: una din aceste părți o vom numi interioară, cealaltă exterioară. Admitem că sistemul de coordonate $w_1, \ldots, w_m$ din U poate fi completat la un sistem de coordonate $w_0, w_1, \ldots, w_m$ pe V. Vom spune că *orientarea respectivă corespunde direcției pozitive a normalei*, dacă w_0 crește în partea exterioară a lui U; în cazul contrar vom spune că *orientarea lui V corespunde direcției negative a normalei*.

Să definim acum integrala formei de grad k, α, pe un domeniu orientabil Γ, de dimensiune k ($k \leqslant n$). Presupunem că acest domeniu este închis, mărginit, și suficient de neted. Descompunem pe Γ în porțiuni $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(m)}$, astfel încît, în fiecare dintre acestea se pot introduce coordonate locale, și introducem aceste coordonate în mod concordant. Astfel, pe Γ se definește una din cele două orientări posibile. În fiecare porțiune $\Gamma^{(i)}$ exprimăm forma α în coordonatele locale $u_1, \ldots, u_k$. Dacă forma α a fost dată într-un domeniu n-dimensional ce conține pe Γ, atunci coordonatele locale $u_1, \ldots, u_n$ trebuie alese, astfel încît, $n-k$ dintre ele, de exemplu $u_{k+1}, \ldots, u_n$ să se anuleze pe Γ; atunci $du_{k+1} = 0, \ldots, du_n = 0$ pe Γ, și forma α se va scrie,

$$\alpha = a(u_1, \ldots, u_k)\,du_1\ldots du_k.$$

Integrăm în raport cu aceste coordonate forma α în mod uzual, pe fiecare porțiune $\Gamma^{(i)}$ și adunăm rezultatele obținute. Este ușor de înțeles că valoarea astfel definită a integralei $\int_\Gamma \alpha$, nu depinde de descompunerea domeniului Γ în porțiuni și nici de alegerea coordonatelor locale pe fiecare porțiune, corespunzînd unei orientări determinate. Este suficient să ne reamintim că, la trecerea la noi coordonate $u_1', \ldots, u_k'$, forma α devine:

$$\alpha = u(u_1(u_1', \ldots, u_k'), \ldots, u_k(u_1', \ldots, u_k')D\begin{pmatrix} u_1 \ldots u_k \\ u_1' \ldots u_k' \end{pmatrix} \mathrm{d}u_1' \ldots \mathrm{d}u_k'.$$

Dar, dacă în porțiunile $\Gamma^{(i)}$, trecem la coordonate locale ce corespund orientării opuse, atunci integrala $\int_\Gamma \alpha$ își schimbă semnul, căci în acest caz jacobienii $D\begin{pmatrix} u_1 \ldots u_k \\ u_1' \ldots u_k' \end{pmatrix}$ sînt negativi.

Astfel, $\int_\Gamma \alpha$ este determinat unic, cu aproximația semnului, iar semnul la rîndul său este unic determinat de orientarea lui Γ.

Formula Gauss-Ostrogradski. Fie α o $(n-1)$-formă definită pe un domeniu mărginit G, n-dimensional cu frontieră Γ, netedă pe porțiuni. Presupunem că orientarea lui G corespunde direcției pozitive a normalei la frontiera sa Γ. Prin $\mathrm{d}\alpha$, ca mai înainte, se notează diferențiala formei α. Atunci are loc formula

$$\int_G \mathrm{d}\alpha = \int_\Gamma \alpha, \tag{7}$$

numită *formula lui Gauss-Ostrogradski*. Dacă orientarea lui G corespunde direcției negative a normalei, trebuie să punem semnul minus în fața uneia dintre cele două integrale.

Ca exemplu, să considerăm 2-forma α în spațiul cu 3 dimensiuni. În coordonatele x_1, x_2, x_3 ea se scrie sub forma

$$\alpha = a_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + a_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + a_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

iar diferențiala sa sub forma

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3,$$

formula lui Gauss-Ostrogradski scriindu-se deci, în acest caz,

$$\int_\Gamma [a_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + a_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + a_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2] =$$

$$= \int_G \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3, \tag{8}$$

formă sub care ea este de obicei predată în cursurile de analiză.

Generalizarea formulei lui Gauss-Ostrogradski este formula lui Stokes *. Ea se scrie sub aceeași formă

$$\int_G \mathrm{d}\alpha = \int_\Gamma \alpha,$$

cu diferența că, în acest caz, G este un domeniu k-dimensional mărginit ($k < n$), iar α este o $(k-1)$-formă; orientarea domeniului G ca mai sus, corespunde direcției pozitive a normalei la frontiera Γ.

Drept exemplu poate sluji formula clasică a lui Stokes. În spațiul tridimensional, în coordonatele x_1, x_2, x_3, 1-forma α se scrie

$$\alpha = a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 + a_3\,\mathrm{d}x_3,$$

iar diferențiala sa

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1.$$

Prin urmare, formula lui Stokes devine

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1\right] =$$

$$= \int_\Gamma [a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 + a_3\,\mathrm{d}x_3], \tag{9}$$

G fiind un domeniu tridimensional, iar Γ curba ce-l mărginește.

* v. G. de Rham, *Varietăți diferențiabile*, (lb. franceză), Ed. Hermann, unde această formulă este dată în termeni apropiați de cei utilizați aici.

1.2. *Forma* ω. Considerăm acum suprafaţa S, definită de ecuaţia $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, funcţia $P(x)$ fiind indefinit derivabilă şi grad $P = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right)$ neanulîndu-se pe suprafaţa S (deci lipsesc punctele singulare).

Vom studia în cele ce urmează o anume $(n-1)$ formă ω, invariant legată de suprafaţa $P = 0$, mai precis, unic determinată de funcţia P pe suprafaţa $P = 0$ şi care va juca un rol însemnat în continuare.

Această formă este definită de ecuaţia

$$\mathrm{d}P\omega = \mathrm{d}v, \tag{1}$$

unde $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$, iar $\mathrm{d}P$ este diferenţiala funcţiei P.

Mai înainte de toate să arătăm că, în ipotezele făcute mai sus, *forma* ω într-adevăr *există într-un domeniu n-dimensional ce conţine suprafaţa* S.

Într-adevăr, în aceste condiţii, în vecinătatea fiecărui punct al suprafeţei se poate introduce un sistem local de coordonate, $u_1, \ldots, u_n$, astfel încît una dintre ele, să zicem u_j este chiar mărimea $P(x)$, iar formulele de trecere de la coordonatele $x_1, \ldots, x_n$ la coordonatele $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt date de funcţii indefinit derivabile cu jacobian pozitiv $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$. Avem în aceste coordonate $\mathrm{d}v = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_{j-1}\mathrm{d}P\,\mathrm{d}u_{j+1} \ldots \mathrm{d}u_n$ şi, prin urmare, putem pune

$$\omega = (-1)^{j-1} D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_{j-1}\mathrm{d}u_{j+1} \ldots \mathrm{d}u_n, \tag{2}$$

în acest mod existenţa formei ω este demonstrată.

Dacă, în particular, în vecinătatea unui punct dat, $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, atunci putem alege drept coordonate $u_1, \ldots, u_n$,

$$u_1 = x_1, \ldots, u_j = P, \ldots, u_n = x_n;$$

şi atunci

$$D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{D\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}},$$

iar forma definită de formula (2) se poate scrie

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{j-1}\mathrm{d}x_{j+1} \ldots \mathrm{d}x_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}. \tag{3}$$

Să considerăm acum problema unicităţii formei ω. În general, forma ω nu este definită în mod unic de ecuaţia (1); este evident că odată cu forma ω, orice formă de tipul $\omega + \gamma$, γ fiind o formă „ortogonală" formei $\mathrm{d}P$, adică verificînd $\mathrm{d}P\gamma = 0$, va verifica ecuaţia (1). Arătăm că *aici forma* γ, *ortogonală formei* $\mathrm{d}P$ *se poate reprezenta*

$$\gamma = \alpha\,\mathrm{d}P,$$

α *fiind o anumită* $(n-2)$ *formă*. Într-adevăr, în coordonatele $u_1 = P$, $u_2, \ldots, u_n$, forma diferenţială γ, ca orice $(n-1)$ formă se poate scrie

$$\gamma = g_1\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n + g_2\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}u_3 \ldots \mathrm{d}u_n + \ldots + g_n\mathrm{d}P\,\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_{n-1},$$

coeficienţii $g_1, g_2, \ldots, g_n$ fiind funcţii de coordonate. Egalitatea $\mathrm{d}P\,\gamma = 0$ conduce la relaţia $g_1 = 0$. Scoţînd pe $\mathrm{d}P$ în factor în restul termenilor, obţinem rezultatul căutat.

Să remarcăm (şi această observaţie ne va fi utilă în continuare) că, precum se vede din demonstraţie, *dacă forma* γ *este cu suport compact, atunci şi* α *este cu suport compact.*

Rezultă de asemenea din demonstraţie că, pe suprafaţa S, forma γ este identic nulă (căci $\mathrm{d}P = 0$) şi, prin urmare, *pe suprafaţa* $P = 0$, *forma* ω *este determinată în mod unic de funcţia* P.

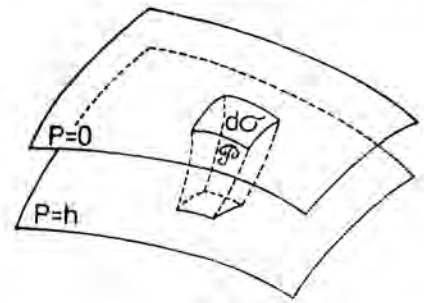

Fig. 6

Să lămurim sensul geometric al formei ω. Considerăm suprafeţele S şi S_h, definite de ecuaţiile $P = 0$, respectiv $P = h$, pentru h suficient de mic (fig. 6). Alegem un element de suprafaţă $\mathrm{d}\sigma$ pe supra-

fața S și îl transportăm de-a lungul liniilor de coordonate, $u_1, \ldots$ $\ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ pe suprafața S_h. Obținem astfel corpul II având un anumit volum dv. Forma ω, conform definiției, reprezintă raportul dintre dv și $dP = h$. Ca atare, *forma ω reprezintă viteza de variație a volumului elementar dv în raport cu variația lui P.*

Pe acest model se arată ușor invarianța formei ω pe suprafața S. Într-adevăr, la o schimbare a coordonatelor $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots$ $\ldots, u_n$ în unele noi, se modifică înclinarea corpului II în raport cu suprafața S; dar baza sa nu se modifică, după cum nu se modifică nici înălțimea sa, dată de distanța la suprafața S_h, și deci nici volumul său, de unde rezultă că nu se va modifica nici $\omega = \dfrac{dv}{dP}$. Astfel, forma ω nu depinde de alegerea celorlalte coordonate $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$.

Totuși, forma ω depinde, bineînțeles, de alegerea funcției P ce definește, prin ecuația $P = 0$, suprafața S. Să vedem cum trebuie să se modifice forma ω dacă, în locul ecuației $P = 0$, considerăm ecuația $P_1 \equiv \alpha P = 0$, $\alpha(x)$ fiind o funcție ce nu se anulează. De-a lungul suprafeței S vom avea egalitatea $dP_1 = \alpha\, dP$, de unde rezultă că forma corespunzătoare va verifica relația

$$\omega_1 = \frac{dv}{dP_1} = \frac{1}{\alpha}\,\omega.$$

Să mai observăm că, dacă funcția $P(x)$ este distanța euclidiană a punctului x la suprafața $P = 0$ (sau diferă de această distanță prin infiniți mici de ordin superior), forma ω pe S coincide cu elementul de arie euclidian $d\sigma$ al suprafeței S.

1.3. *Distribuția* $\delta(P)$. Să trecem acum la definiția noastră fundamentală. Fiecărei funcții test, $\varphi(x)$, îi facem să corespundă numărul

$$\int_{P=0} \varphi(x)\omega.$$

Obținem, evident, o funcțională liniară continuă pe spațiul funcțiilor test. Să notăm această funcțională cu $\delta(P)$, adică să punem

$$(1) \qquad (\delta(P), \varphi) = \int \delta(P)\varphi\, dx = \int_{P=0} \varphi(x)\omega.$$

Din cele spuse mai înainte rezultă că *funcționala $\delta(P)$ nu depinde de alegerea formei ω, ci depinde numai de funcția $P(x)$.*

Pentru a arăta echivalența acestei definiții cu definiția lui $\delta(P)$, dată la începutul acestui paragraf, este suficient de remarcat că, în coordonatele $u_1 = P, u_2, \ldots, u_n$, conform formulei (2) § 1.2:

$$\omega = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_2 \ldots du_n.$$

Exemple. 1. Mai întîi să considerăm distribuția $\delta(x_1)$, care la începutul acestui paragraf a fost punctul de pornire pentru definiția generală a distribuției $\delta(P)$. Ecuația $x_1 = 0$ definește un hiperplan de coordonate; forma ω este în acest caz,

$$\omega = dx_2 \ldots dx_n,$$

și deci

$$(2) \qquad \int \delta(x_1)\varphi(x)\, dx = (\delta(x_1), \varphi) = \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n.$$

2. Să considerăm distribuția $\delta(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, unde $\sum \alpha_i^2 = 1$. Ecuația

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

definește un hiperplan ce trece prin originea coordonatelor, ortogonal vectorului unitar α.

Dacă se introduc coordonatele

$$u_1 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\ u_2, \ldots, u_n,$$

astfel ca matricea transformării să fie ortogonală (o rotație a axelor), forma ω se poate scrie $du_2 \ldots du_n$. Prin urmare,

$$(3) \quad (\delta(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n), \varphi) = \int_{\sum \alpha_i x_i = 0} \varphi\, du_2 \ldots du_n = \int_{\sum \alpha_i x_i = 0} \varphi\, d\sigma,$$

unde $d\sigma$ este elementul euclidian de arie al hiperplanului $\sum \alpha_i x_i = 0$.

3. Să calculăm distribuția $\delta(xy - c)$ în spațiul cu 2 dimensiuni. Ecuația $xy - c = 0$ definește o hiperbolă *. În coordonatele $u_1 = x$, $u_2 = xy - c$, obținem din formula (3), §1.2, $\omega = -\frac{dx}{x}$, și prin urmare:

$$(\delta(xy - c), \varphi(x, y)) =$$

$$= \int \delta(xy - c)\varphi(x, y)\, dx\, dy = -\int \varphi\left(x, \frac{c}{x}\right)\frac{dx}{x}. \tag{4}$$

4. Să căutăm distribuția $\delta(r - c)$, în care $r^2 = \sum x_i^2$, $c > 0$. Ecuația $r - c = 0$ definește sfera O_c, de rază c. Cum $P = r - c$ este distanța euclidiană la suprafața sferei, atunci pentru $r = c$ forma ω coincide cu elementul euclidian de arie al sferei O_c și deci **,

$$(\delta(r - c), \varphi) = \int \delta(r - c)\varphi\, dx = \int_{O_c} \varphi\, dO_c. \tag{5}$$

Prin urmare, $\delta(r - c)$ poate fi caracterizată ca fiind funcționala ce corespunde masei uniform distribuite pe sfera $r = c$, cu densitatea egală cu 1.

Aceeași sferă, de rază c este dată de ecuația $r^2 - c^2 = 0$. Să găsim expresia lui $\delta(r^2 - c^2)$. Punem $u_1 = r^2 - c^2$, $u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$, $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ fiind unghiurile uzuale ce apar în coordonatele sferice. Obținem:

$$\omega = \frac{1}{2r}\, dO_c = \frac{1}{2c}\, dO_c,$$

și

$$(\delta(r^2 - c^2), \varphi) = \int \delta(r^2 - c^2)\varphi\, dx = \frac{1}{2c}\int_{O_c} \varphi\, dO_c. \tag{6}$$

Distribuția $\delta(P)$ se obține în mod natural prin derivarea funcției caracteristice $\theta(P)$ a domeniului $P > 0$, adică funcția egală cu 1

* Dacă $c \neq 0$. În ceea ce privește cazul $c = 0$, v. § 4.2.
** v. și exemplul 4, § 1.5.

pentru $P(x) \geqslant 0$ și 0 pentru $P(x) < 0$:

$$(\theta(P), \varphi) = \int_{P \geqslant 0} \varphi(x)\, dx.$$

Afirmăm că are loc formula

$$\theta'(P) = \delta(P), \tag{7}$$

care trebuie înțeleasă astfel:

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{7'}$$

Pentru a demonstra formula (7), arătăm la început că, pentru j fixat, funcționalele ce figurează în ambii membri ai egalității (7') coincid în vecinătatea fiecărui punct al suprafeței $P = 0$, în care $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$ (în afara suprafeței ambele sînt nule). Pentru aceasta, aplicăm atît membrul drept cît și cel stîng unei funcții test ce are suportul conținut într-o mică vecinătate a unui astfel de punct. Membrul stîng devine:

$$\left(\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j}, \varphi\right) = -\left(\theta(P), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\int_{P \geqslant 0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx,$$

iar cel drept

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P), \varphi\right) = \left(\delta(P), \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\right) = \int_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega.$$

Presupunem pentru început că domeniul $P > 0$ este mărginit. Aplicăm $(n - 1)$-formei ce figurează sub semnul integral în membrul stîng și acestui domeniu formula lui Gauss-Ostrogradski. Printre coordonate includem mărimea P însăși; atunci, ținînd seama că în cazul de față această mărime crește spre interiorul domeniului, obținem:

$$\int_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega = -\int_{P \geqslant 0} d\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega\right).$$

Presupunînd funcția test $\varphi(x)$ diferită de zero doar într-o vecinătate suficient de mică a suprafeței $P = 0$, forma ce figurează sub integrală în membrul drept se poate calcula în coordonatele $u_1 = x_1, \ldots, u_{j-1} = x_{j-1}, u_j = P, \ldots, u_n = x_n$. În aceste coordonate,

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n}{\partial P / \partial x_j}$$

și, prin urmare,

$$d\left(\varphi \frac{\partial P}{\partial x_j} \omega\right) = (-1)^{j-1} d(\varphi dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n.$$

În afara domeniului considerat, egalitatea

$$d\left(\varphi \frac{\partial P}{\partial x_j} \omega\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

are de asemenea loc, căci acolo $\varphi(x) \equiv 0$. De aici

$$\int_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega = - \int_{P>0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

Membrul sting al acestei egalități este $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta(P), \varphi\right)$, iar cel drept $\left(\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j}, \varphi\right)$. Astfel egalitatea (7′) a fost demonstrată în cazul considerat.

Dacă domeniul $P \geqslant 0$ nu este mărginit, atunci îl înlocuim cu intersecția sa G_R cu o bilă de rază suficient de mare, $|x| \leqslant R$, în afara căreia funcția $\varphi(x)$ este identic nulă. Dacă Γ_R este frontiera lui G_R, atunci formula lui Gauss-Ostrogradski dă

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega = - \int_{G_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx;$$

dar, cum în afara bilei $|x| \leqslant R$, funcția $\varphi(x)$ este egală cu zero, este valabilă și egalitatea

$$\int_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega = - \int_{P>0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx,$$

care ne trebuia.

Fie acum x un punct arbitrar al suprafeței $P = 0$. Putem construi un nou sistem de coordonate $\xi_j = \sum \alpha_{jk} x_k$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, astfel încît $\frac{\partial P}{\partial \xi_j} \neq 0$ pentru orice j. Atunci, din cele arătate, în vecinătatea punctului considerat vor fi adevărate toate relațiile

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial P}{\partial \xi_j} \delta(P). \tag{8}$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \sum_j \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Înmulțind egalitatea (8) cu α_{jk} și sumînd în raport cu j, găsim că în vecinătatea punctului dat

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_k} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial \theta(P)}{\partial \xi_j} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial P}{\partial \xi_j} \delta(P) = \frac{\partial P}{\partial x_k} \delta(P).$$

Astfel, funcționalele $\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_k}$ și $\frac{\partial P}{\partial x_k} \delta(P)$ coincid în vecinătatea oricărui punct al suprafeței $P = 0$. Dar atunci ele sînt egale, ceea ce termină demonstrația.

Cîteodată este util de a considera *distribuții vectoriale*, adică vectori $f = (f_1, \ldots, f_n)$, pentru care componentele $f_1, \ldots, f_n$ sînt distribuții. Două distribuții vectoriale $f = (f_1, \ldots, f_n)$ și $g = (g_1, \ldots, g_n)$ sînt egale, dacă $f_1 = g_1, \ldots, f_n = g_n$. Dacă punem, pentru orice distribuție g

$$\text{grad } g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right), \tag{9}$$

atunci formula (7') se poate scrie sub forma

$$\text{grad } \theta(P) = \delta(P) \text{ grad } P. \tag{7''}$$

În punctul următor, această formulă va fi utilizată pentru a obține simplu formula lui Green.

1.4. **Exemplu : *deducerea formulei lui Green.*** Am demonstrat mai sus posibilitatea de a considera distribuții vectoriale, adică vectori $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ale căror componente f_i sînt distribuții. Distribuțiile vectoriale pot fi considerate și ca funcționale definite pe funcții test vectoriale : dacă $f = (f_1, \ldots, f_n)$ și $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, vom pune

$$(f, \psi) = \sum_{j=1}^{n} (f_j, \psi_j). \tag{1}$$

De exemplu, dacă g este o distribuție și ψ o funcție test, putem scrie funcționala Δg (Δ — operatorul lui Laplace) sub forma

$$(\Delta g, \psi) = -(\text{grad } g, \text{grad } \psi), \tag{2}$$

unde grad g este distribuția vectorială $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$, iar grad ψ funcția test vectorială $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)$.

În punctul precedent a fost demonstrată formula

$$\text{grad } \theta(P) = \delta(P) \text{ grad } P. \tag{3}$$

Folosind această formulă vom da acum o demonstrație simplă a formulei lui Green.

Să remarcăm că, dacă g este o distribuție, iar $h(x)$ o funcție indefinit derivabilă, atunci avem

$$\text{grad } (hg) = g \text{ grad } h + h \text{ grad } g.$$

Fie $u(x)$ o funcție indefinit derivabilă arbitrară : să examinăm rezultatul aplicării funcționalei $\Delta[u\theta(P)]$ funcției test $\varphi(x)$. Folosind

scrierea vectorială vom transforma această expresie în modul următor :

$$(\Delta[u\theta(P)], \varphi) = (\text{grad } [u\theta(P)], \text{ grad } \varphi) =$$

$$= (u \text{ grad } \theta(P), \text{ grad } \varphi) - (\theta(P) \text{ grad } u, \text{ grad } \varphi) =$$

$$= (u\delta(P) \text{ grad } P, \text{ grad } \varphi) - (\theta(P) \text{ grad } u, \text{ grad } \varphi).$$

Reamintindu-ne de definiția funcționalelor $\delta(P)$ și $\theta(P)$, putem scrie

$$(\Delta[u\theta(P)], \varphi) = -\int_{P>0} (\text{grad } u, \text{ grad } \varphi)\, dx - \int_{P=0} u(\text{grad } P, \text{ grad } \varphi)\omega. \tag{4}$$

Aceasta este tocmai formula lui Green scrisă în distribuții. În cazul în care $P(x)$ este — cu aproximația unor infiniți mici de ordin superior — distanța de la punctul x la suprafața $P = 0$, și prin urmare grad P este versorul normal, (grad P, grad φ) va fi derivata normală a funcției φ, iar ω se reduce la elementul euclidian de arie $d\sigma$ a suprafeței $P = 0$. În acest caz, formula (4) se reduce la cea uzuală :

$$\int_{P>0} \Delta u\varphi \, dv = -\int_{P>0} (\text{grad } u, \text{ grad } \varphi)\, dx - \int_{P=0} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \tag{5}$$

Am demonstrat-o pentru funcțiile infinit derivabile u și φ ; dar prin trecere la limită putem s-o extidem la funcții avînd exact derivate de ordinul ce apare în formulă.

1.5. **Formele $\omega_k(\varphi)$ și distribuțiile $\delta^{(k)}(P)$.** Un rol important îl joacă și derivatele funcționalei $\delta(P)$ în raport cu argumentul P.

$$\omega_0(\varphi) = \varphi\omega, \tag{1}$$

$$d\omega_0(\varphi) = dP\omega_1(\varphi), \tag{2}$$

. . . . . .

$$d\omega_{k-1}(\varphi) = dP\omega_k(\varphi), \tag{3}$$

. . . . . .

d fiind diferențială exterioară.

Existența acestor forme într-un domeniu conținînd suprafața $P = 0$ se demonstrează ușor utilizînd coordonatele $u_1 = P, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$. Într-adevăr, reamintindu-ne că

$$\omega = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n$$

și punînd $\varphi(x) = \varphi_1(u)$, putem scrie ecuația

$$\mathrm{d}\omega_0 = \mathrm{d}(\varphi_1\omega) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n = \mathrm{d}P\omega_1(\varphi),$$

de unde se vede că se poate pune

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n.$$

În continuare, în același mod avem ecuația

$$\mathrm{d}(\omega_1(\varphi)) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}P\,\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n = \mathrm{d}P\omega_2(\varphi),$$

și putem pune

$$\omega_2(\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n$$

ș.a.m.d., în general

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n, \tag{4}$$

unde $\varphi_1(u) = \varphi(x)$.

Spre deosebire de forma ω, aceste noi forme nu mai sînt unic determinate de funcția $P(x)$ (și de funcția test $\varphi(x)$) nici măcar pe suprafața $P = 0$. Pentru noi însă este important faptul că *integrala formei* $\omega_k(\varphi)$ *pe suprafața* $P = 0$ *este unic determinată*. Pentru a arăta aceasta vom dovedi că dacă forma $\tilde{\omega}_k(\varphi)$ verifică aceeași ecuație

ca și $\omega_k(\varphi)$, atunci

$$\omega_k - \tilde{\omega}_k = \mathrm{d}\alpha + \beta\mathrm{d}P, \tag{5}$$

unde α și β sînt anumite forme cu suport compact, de grad $(n-1)$ respectiv $(n-2)$. Să lămurim mai întîi de ce de aici rezultă determinarea unică a integralei. Pe suprafața $P = 0$ al doilea termen se anulează, și deci

$$\omega_k - \tilde{\omega}_k = \mathrm{d}\alpha.$$

Din teorema lui Stokes,

$$\int_{P=0} \mathrm{d}\alpha = \int_\Gamma \alpha,$$

Γ fiind frontiera suprafeței $P = 0$. Dar suprafața P sau este închisă și atunci nu are frontieră, sau se întinde la infinit, și în acest caz $\int_\Gamma \alpha = 0$, forma α fiind cu suport compact.

Relația (5) o demonstrăm prin inducție. Reamintim că după cum s-a arătat la pct. 1.2, dacă o formă γ este ortogonală lui $\mathrm{d}P$, atunci se poate scrie

$$\gamma = \gamma_1\,\mathrm{d}P,$$

γ_1 fiind o $(n-2)$ formă, și că dacă γ este cu suport compact, atunci și γ_1 are suportul compact. De aici, pentru $k = 0$ rezultă direct că,

$$\omega_0 - \tilde{\omega}_0 = \beta\,\mathrm{d}P,$$

β avînd suportul compact, căci formele ω_0 și $\tilde{\omega}_0$ au suportul compact, ele conțin funcția test φ ca factor. Să presupunem acum că relația (5) este îndeplinită pentru forme cu suport compact α și β și să efectuăm trecerea de la k la $k+1$. Pentru aceasta diferențiem relația (5); obținem:

$$\mathrm{d}\omega_k - \mathrm{d}\tilde{\omega}_k = \mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}P,$$

căci diferențiala diferențialei unei forme este întotdeauna nulă. Din definiția formelor ω_{k+1} și $\tilde{\omega}_{k+1}$,

$$\mathrm{d}P\,(\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1}\mathrm{d}\beta) = 0.$$

Prin urmare,

$$\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1}\,d\beta = \gamma\,dP,$$

şi rămîne de arătat că forma γ este cu suport compact. Pentru aceasta este necesar, după cum s-a mai spus, de a arăta că ω_{k+1} şi $\tilde{\omega}_{k+1}$ sînt cu suport compact. Dar aceasta se vede din definiţia lor (din egalităţile (1)—(3)).

Astfel, integrala formei $\omega_k(\varphi)$ pe suprafaţa $P = 0$ este într-adevăr unic determinată de funcţiile $P(x)$ şi $\varphi(x)$. Punem, prin definiţie

$$(\delta^{(k)}(P),\ \varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi\,dx =$$

(6)

$$= (-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Că această definiţie a distribuţiei $\delta^{(k)}(P)$ coincide cu definiţia dată la începutul acestui paragraf este vizibil din formula (4).

Exemple. 1. În cazul $P(x) \equiv x_1 = 0$ avem conform formulei (4)

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^k}\,dx_2 \ldots dx_n$$

şi

$$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi\,dx = (-1)^k \int \frac{\partial^k \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^k}\,dx_2 \ldots dx_n. \tag{7}$$

2. Calculăm $\delta^{(k)}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, unde $\sum \alpha_i^2 = 1$. Efectuînd aceeaşi rotaţie a axelor ca în exemplul 2, §1.3, găsim

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1^k}\,du_2 \ldots du_n$$

şi

$$\int \delta^{(k)}(\sum \alpha_i x_i)\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int\limits_{\sum \alpha_i x_i = 0} \frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1^k}\,d\sigma \tag{8}$$

derivata din dreapta efectuîndu-se după direcţia ortogonală hiperplanului

$$\sum \alpha_i x_i = 0$$

(în direcţia în care $\sum \alpha_i x_i$ creşte), iar $d\sigma$ este elementul de arie al hiperplanului.

3. Să găsim $\delta^{(k)}(xy - c)$. Ca în exemplul 3, § 1.3 trecem la coordonatele $u_1 = x$, $u_2 = xy - c$. Cum

$$D\begin{pmatrix} x & y \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1},$$

avem:

$$\omega_k(\varphi) = -\frac{\partial^k}{\partial u_2^k}\left(\frac{\varphi\left(u_1, \dfrac{u_2 + c}{u_1}\right)}{u_1}\right) du,$$

şi

$$\int \delta^{(k)}(xy - c)\varphi(x, y)\,dx\,dy = (-1)^{k+1} \int \frac{\partial^k \varphi\left(x_1, \dfrac{c}{x}\right)}{\partial y_k} \frac{dx}{x^{k+1}}. \tag{9}$$

4. Să construim distribuţia $\delta^{(k)}(r - c)$, $r^2 = \sum x_i^2$. Introducem coordonatele sferice $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, ..., $u_n = \theta_{n-1}$. Este uşor de stabilit că în aceste coordonate

$$\omega = r^{n-1}\,d\Omega,$$

$d\Omega$ fiind elementul de arie al sferei $r = 1$. De aici

$$\omega_0 = \varphi r^{n-1} d\Omega, \quad \omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi r^{n-1})\,d\Omega$$

ş.a.m.d. În general

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})\,d\Omega,$$

şi deci

$$\int \delta^{(k)}(r - c)\varphi\,dx = \frac{(-1)^k}{c^{n-1}} \int\limits_{\sigma_c} \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})\,dO_c, \tag{10}$$

în care O_c este sfera $r = c = 0$ şi dO_c elementul său de arie.

5. În sfirşit, pentru a calcula pe $\delta^{(k)}(r^2 - c^2)$ trecem la coordonatele $u_1 = r^2 - c^2$, $u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$; obţinem

$$\omega = \frac{1}{2} r^{n-2}\, d\Omega$$

şi

$$\omega_k(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2} d\Omega,$$

de unde

$$\int \delta^{(k)}(r^2 - c^2)\varphi\, dx = \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int_{O_c} \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k (\varphi r^{n-2})\, dO_c \tag{11}$$

şi prin urmare

$$(\delta^{(k)}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - c^2), \varphi) = \tag{12}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}|_{r=c}\, dO_c.$$

1.6. Identităţi pentru $\delta^{(k)}(P)$. Să arătăm că distribuţia $\delta^{(k)}(P)$ se poate deriva ca o funcţie compusă:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P) = \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

Pentru demonstraţie este suficient de arătat, ca şi în § 1.3, că pentru un j fixat, funcţionalele din membrul stîng şi din membrul drept coincid în vecinătatea oricărui punct al suprafeţei $P = 0$ în care $\dfrac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$.

Pentru aceasta aplicăm funcţiei test $\varphi(x)$, diferită de zero doar într-o vecinătate suficient de mică a unui astfel de punct, funcţionalele ce figurează în ambii membri ai lui (1), luînd drept coordonate în această vecinătate $u_1 = x_1, \ldots, u_j = P, \ldots, u_n = x_n$. Atunci

$D\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = \dfrac{\partial P}{\partial x_j}$, $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial P}{\partial x_j}}$ şi forma ω_k devine

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\varphi}{\dfrac{\partial P}{\partial x_j}}\right) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Funcţionala din membrul drept al egalităţii (1) acţionează astfel:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P), \varphi\right) = \left(\delta^{(k+1)}(P), \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\right) = (-1)^{k+1}\int_{P=0} \omega_{k+1}\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x_j}\right) =$$

$$= (-1)^{k+1}\int_{P=0} \frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial P^{k+1}} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Funcţionala din membrul stîng al egalităţii (1) acţionează conform formulei

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = -\left(\delta^{(k)}(P), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = (-1)^{k+1}\int_{P=0} \omega_k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) =$$

$$= (-1)^{k+1}\int_{P=0} \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial P}{\partial x_j}}\right) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Este deci suficient de arătat că are loc egalitatea

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial P}{\partial x_j}}\right). \tag{2}$$

Pentru $k = 0$ ea este evident îndeplinită căci $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_j(P), \ldots, x_n)$ şi, prin urmare,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)^{-1}.$$

Rezultă de aici egalitatea (2) pentru orice k, căci

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial P}\right).$$

În acest mod egalitatea funcţionalelor ce apar în ambii membri ai formulei (1) a fost stabilită în vecinătatea oricărui punct al suprafeţei $P = 0$, în care $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$; cum am văzut mai înainte aceasta este suficient pentru valabilitatea formulei (1).

Să arătăm acum că au loc următoarele identităţi ce leagă funcţionala $\delta(P)$ de derivatele sale:

$$P\delta(P) = 0, \tag{3}$$

$$P\delta'(P) + \delta(P) = 0, \tag{4}$$

$$P\delta''(P) + 2\delta'(P) = 0, \tag{5}$$

. . . . . .

$$P\delta^{(k)}(P) + k\delta^{(k-1)}(P) = 0, \tag{6}$$

. . . . . .

Prima dintre aceste inegalităţi este evidentă, căci integrala produsului $P\varphi$ este nulă pe suprafaţa $P = 0$. Derivînd această identitate în raport cu x_j şi utilizînd formula (1) găsim

$$\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P) + P\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta'(P) = 0;$$

şi cum ştim că pentru un anumit j, $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$ putem simplifica cu $\frac{\partial P}{\partial x_j}$ şi obţinem a doua identitate *. Procedînd analog se poate arăta valabilitatea celorlalte identităţi.

Exemplu. Distribuţia $\delta^{(k)}(r^2 - t^2)$, ca soluţie a ecuaţiei undelor în spaţiul cu un număr impar de dimensiuni. Să calculăm rezultatul aplicării operatorului undelor $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ distribuţiei $\delta^{(k)}(r^2 - t^2)$. Avem:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2x_j\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4x_j^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2n\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) +$$

$$+ 4(r^2 - t^2)\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

ceea ce, în conformitate cu formula (6), se poate scrie

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = [2n - 4(k+2)]\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2).$$

Pe de altă parte, în mod asemănător,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = -2\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

* În general este valabilă următoarea afirmaţie: *dacă au loc egalităţile $a_j(x)f = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, iar funcţiile $a_j(x)$ nu au rădăcini comune* (pentru toţi indicii j) *pe mulţimea închisă F în care este conţinut suportul funcţionalei f, atunci $f = 0$.* Într-adevăr pentru fiecare punct x_0 al mulţimii F se poate găsi o vecinătate U în care, pentru o anumită funcţie a_j, $|a_j(x)|$ este superior unei constante pozitive, să zicem de pildă funcţia $a_1(x)$. Atunci pentru orice funcţie test $\varphi(x)$ cu suportul conţinut în U se poate scrie $\varphi(x) = a_1(x)\psi(x)$, ψ o nouă funcţie test. Avem $(f, \varphi) = (f, a_1\psi) = (a_1 f, \psi) = 0$, adică funcţionala f este nulă în vecinătatea punctului x_0. În acest mod f rezultă nulă în vecinătatea oricărui punct şi prin urmare $f = 0$.

de unde

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2)=(2n-4k-6)\delta^{(k+1)}(r^2-t^2).$$

Ultima expresie se anulează pentru $k=\frac{n-3}{2}$. Astfel, *dacă* n *este impar şi* $k=\frac{n-3}{2}$, *atunci distribuţia* $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$ *verifică ecuaţia undelor*:

$$\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u=0.$$

În particular, pentru $n=3$, distribuţia $\delta(r^2-t^2)$ este o soluţie a ecuaţiei undelor.

Să examinăm la ce condiţii iniţiale corespunde soluţia găsită. Conform formulei (11), § 1.5,

$$(7)\qquad (\delta^{(k)}(r^2-t^2),\ \varphi(x))=\frac{(-1)^k}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}|_{r=t}\,d\Omega.$$

Pentru $n=2k+3$ funcţia de integrat este de forma

$$\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{2k+1}.$$

Fiecare aplicare a operatorului $\frac{\partial}{r\,\partial r}$ reduce exponentul lui r^m cu două unităţi. După k astfel de iterări, asupra lui φr^{2k+1} se obţine o sumă de termeni care conţin pe r la cel mult puterea întîi. Făcînd $r=t$ şi făcînd pe t să tindă la zero, obţinem:

$$(8)\qquad \lim_{t\to 0}\delta^{(k)}(r^2-t^2)=0.$$

În continuare avem:

$$\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t}=-2t\delta^{(k+1)}(r^2-t^2)=2t\frac{(-1)^k}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^{k+1}(\varphi r^{2k+1})|_{r=t}\,d\Omega.$$

În acest caz integrandul conţine un singur termen ce conţine pe r la o putere negativă; după cum se calculează uşor el este egal cu

$$\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\frac{\varphi(x)}{r}.$$

De aceea, făcînd $r=t$ şi făcînd pe t să tindă la zero, obţinem la limită

$$(9)\qquad \left.\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t}\right|_{t=0}=(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\Omega_n\varphi(0),$$

unde Ω_n este aria sferei unitate. După cum se ştie

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{2\pi^{\frac{2k+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)}=\frac{2^{k+2}}{(2k+1)!!}\pi^{k+1}.$$

În definitiv obţinem,

$$(10)\qquad \left.\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t}\right|_{t=0}=(-1)^k 2\pi^{k+1}\varphi(0),$$

adică soluţia

$$u(x,t)=\delta^{(k)}(r^2-t^2)$$

verifică condiţiile iniţiale

$$(11)\qquad u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=(-1)^k 2\pi^{k+1}\delta(x).$$

Astfel, cu aproximaţia unui factor numeric, distribuţia $u(x,t)$ este soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor (v. cap. I, § 4.4).

1.7. **Identităţi pentru** $\delta^{(k)}(a(x)P)$. Să considerăm funcţiile $P(x)$ şi $Q(x)$ pentru care suprafeţele corespunzătoare $P=0$ şi $Q=0$ ca mai înainte nu au puncte singulare, şi în plus nu se intersectează, astfel încît suprafaţa $PQ=0$ nu are puncte singulare. Are atunci

loc formula

$$\delta(PQ) = P^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\delta(P). \tag{1}$$

Pentru demonstrație să notăm cu ω_P forma ce corespunde suprafeței $P = 0$ și cu ω_Q forma ce corespunde suprafeței $Q = 0$, iar cu ω forma atașată ecuației $PQ = 0$. Aceste forme verifică ecuațiile :

$$\omega_P\, dP = dv \text{ pe suprafața } P = 0, \tag{2}$$

$$\omega_Q\, dQ = dv \text{ pe suprafața } Q = 0, \tag{3}$$

$$\omega(P\, dQ + Q\, dP) = dv \text{ pe ambele suprafețe.} \tag{4}$$

Comparînd (2) cu (4) și remarcînd că pe suprafața $P = 0$ ecuația (4) se reduce la ecuația

$$\omega Q\, dP = dv,$$

vedem că $\omega = Q^{-1}\omega_P$; analog, pe suprafața $Q = 0$ avem $\omega = P^{-1}\omega_Q$. Deci

$$(\delta(PQ), \varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi\omega + \int\limits_{Q=0} \varphi\omega = \int\limits_{P=0} \varphi Q^{-1}\omega_P + \int\limits_{Q=0} \varphi P^{-1}\omega_Q =$$

$$= (Q^{-1}\delta(P), \varphi) + (P^{-1}\delta(Q), \varphi).$$

c.t.a.

În particular, dacă funcția $a(x)$ nu se anulează

$$\delta(aP) = a^{-1}\,\delta(P). \tag{5}$$

Formule noi interesante se obțin derivînd relația (5). În particular, derivînd în raport cu x_j, obținem

$$\delta'(aP)\frac{\partial(aP)}{\partial x_j} = \delta'(aP)P\frac{\partial a}{\partial x_j} + \delta'(aP)a\frac{\partial P}{\partial x_j} =$$

$$= a^{-1}\delta'(P)\frac{\partial P}{\partial x_j} - a^{-2}\delta(P)\frac{\partial a}{\partial x_j}.$$

Ținînd seama de formula (4), § 1.6, putem pune în locul lui $\delta'(ap)$, $-a^{-1}\delta(aP) = -a^{-2}\delta(P)$ și, reducînd, găsim

$$\delta'(aP) = a^{-2}\delta'(P).$$

Analog, pentru orice k și orice funcție $a(x)$*

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P). \tag{6}$$

Exemplu.

$$\delta^{(k)}(r^2 - c^2) = \delta^{(k)}[(r + c)(r - c)] = (r + c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r - c). \tag{7}$$

Această formulă afirmă că pentru orice funcție test φ

$$\int \delta^{(k)}(r^2 - c^2)\varphi(x)\, dx = \int (r + c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r - c)\ \varphi(x)dx.$$

Bineînțeles, comparînd formulele (10) și (11) de la § 1.5 era greu de a vedea această identitate. Pentru $h = 0$ ea devine

$$\int \delta(r^2 - c^2)\varphi(x)\, dx = \frac{1}{2c}\int \delta(r - c)\varphi(x)\, dx,$$

ceea ce se vedea deja din formulele (5) și (6) de la § 1.3.

1.8. Straturi. O funcțională de forma $\mu(x)\delta^{(k-1)}(P)$, sau

$$\int \mu(x)\delta^{(k-1)}(P)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{P=0} \omega_{k-1}(\mu\varphi), \tag{1}$$

se numește *k-strat* sau strat de ordin k, pe suprafața $P = 0$. În particular, un *strat simplu* ($k = 1$) este definit de

$$(\mu\delta(P), \varphi) = \int\limits_{P=0} \mu\varphi\omega = \int\limits_{P=0} \omega_0(\mu\varphi), \tag{2}$$

* Care nu se anulează.

un *dublu strat* ($k = 2$) de formula

$$(3) \qquad (\mu\delta'(P), \varphi) = \int_{P=0} \omega_1(\mu\varphi).$$

Funcţia $\mu(x)$ ce figurează în aceaste formule se numeşte *densitatea* stratului respectiv.

Definiţiile date nu ar fi corecte dacă ele ar depinde de modul în care este scrisă ecuaţia suprafeţei $P = 0$. Dar faptul că o funcţionala dată f este un k-strat, nu depinde de ecuaţia suprafeţei $P = 0$, căci trecînd de la ecuaţia $P = 0$ la ecuaţia $a(x)P = 0$, funcţia $a(x)$ neanulîndu-se, se modifică doar funcţia $\mu(x)$. Într-adevăr, din formula (6) din § 1.6.

$$\mu(x)\delta^{(k-1)}(aP) = \mu(x)a^{-k}(x)\delta^{(k-1)}(P) = \mu_1(x)\delta^{(k-1)}(P).$$

Să arătăm că orice *funcţională* f *de forma*

$$(f, \varphi) = \int_{P=0} \sum_j \alpha_j(x) D^j\varphi(x)\, \mathrm{d}\sigma$$

$$\left(j = (j_1, \ldots, j_n), \quad D^j = \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}\right)$$

se poate reprezenta ca suma unor straturi de diferite ordine. După cum rezultă din cele spuse, pentru aceasta se poate utiliza orice formă specială a ecuaţiei suprafeţei $P = 0$; să presupunem că am scris-o astfel încît $P(x)$ să fie distanţa de la punctul x la suprafaţa $P = 0$, şi prin urmare forma ω asociată coincide cu elementul de arie $\mathrm{d}\sigma$. Vom avea

$$(f, \varphi) = \int_{P=0} \sum_j a_j(x) D^j\varphi(x)\omega = \int_{P=0} \omega_0 \left(\sum_j a_j(x) D^j\varphi\right) = (\delta(P), \sum a_j(D^j\varphi)) =$$

$$= \sum_j (-1)^j (D^j a_j(x)\delta(P), \varphi) = \sum_j (-1)^j \left(\sum_k a_{jk}(x)\delta^{(k)}(P), \varphi\right) =$$

$$= \left(\sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P), \varphi\right),$$

unde

$$b_k(x) = \sum_j (-1)^j a_{jk}(x).$$

Astfel

$$f = \sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P),$$

c.t.a.

1.9. **Distribuţiile** $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ şi $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$. În punctele precedente ale acestui paragraf s-au considerat distribuţii asociate unei hipersuprafeţe $P = 0$. În acest punct vom considera distribuţii asociate unei suprafeţe S de dimensiune mai mică, şi deci definită nu de o singură ci de k ecuaţii

$$(1) \qquad \begin{cases} P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ P_2(x_1, \ldots x_n) = 0, \ldots \\ \qquad\qquad \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Vom presupune că:

1) Funcţiile P_i sînt indefinit derivabile.

2) Mulţimea suprafeţelor $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ este în poziţie regulată, adică în vecinătatea fiecărui punct al suprafeţei S se poate alege un sistem local de coordonate în care $u_i = P_i(x_1, \ldots x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots k)$, celelalte coordonate $u_{k+1}, \ldots u_n$ fiind alese astfel încît jacobianul $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} > 0$.

Să considerăm elementul de volum în $\mathbf{R}^n$:

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

ca o n-formă diferenţială în acest spaţiu şi să reprezentăm această formă ca produsul 1-formelor diferenţiale $\mathrm{d}P_1 \ldots \mathrm{d}P_k$ cu o anumită $n - k$ formă ω:

$$(2) \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}P_1 \ldots \mathrm{d}P_k\omega.$$

Este evident că dacă o astfel de formă ω există, atunci ea nu este unic determinată. Într-adevăr, dacă la o anumită formă ω, definită de (2) adăugăm forma $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{d}P_i$, α_i fiind $(n - k - 1)$ forme arbitrare, forma obţinută $\omega + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}P_i$ va verifica de asemenea egalitatea (2), căci produsele $\mathrm{d}P_i\, \mathrm{d}P_i$ sînt nule.

Pentru a demonstra existența formei ω o vom pune în evidență în variabilele $x_1, \ldots, x_n$. În aceste variabile, elementul de volum se scrie $dv = dx_1 \ldots dx_n$. Formele dP_i se scriu

$$dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial x_n} dx_n$$

și, cum se arată ușor (v. formulele (2) și (3) § 1.1)

$$(3) \qquad dP_1 \ldots dP_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \end{pmatrix} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Din condițiile impuse funcțiilor $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ în matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial P_k}{\partial x_1} & \frac{\partial P_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

există cel puțin un minor de ordin k, care nu se anulează identic. Să admitem că în domeniul considerat este diferit de zero minorul ce conține derivatele în primele k variabile $x_1 \ldots, x_k$:

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Putem atunci pune

$$(4) \qquad \omega = \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}},$$

căci prin înmulțirea cu această formă toți termenii din (3) în afara lui

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k$$

se anulează, căci fiecare va conține cel puțin o aceeași diferențială de două ori. Singurul termen rămas dă

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}} = dx_1 \ldots dx_n = dv.$$

Analog, dacă pentru $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, avem:

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \end{pmatrix} \neq 0,$$

înlocuim (4) prin

$$(4') \qquad \omega = (-1)^{i_1 + \ldots + i_k - \frac{k(k-1)}{2}} \frac{dx_{j_1} \ldots dx_{j_{n-k}}}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \end{pmatrix}},$$

unde $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ și $j_\mu \neq j_\nu$ pentru orice $\mu \neq \nu$. Am arătat astfel existența formei ω.

O reprezentare mai simetrică (dar nu întotdeauna cea mai comodă în calcule) a formei ω se obține dacă se realeg într-o vecinătate mică drept coordonate $u_1 = P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_k = P_k(x_1, \ldots, x_n)$, iar celelalte coordonate $u_{k+1}, \ldots, u_n$ se realeg suficient de netede și astfel ca $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} > 0$. În aceste coordonate elementul de volum se scrie

$$dv = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_1 \ldots du_n.$$

1-formele dP_i coincid pur și simplu cu diferențialele du_i ($i = 1, \ldots, k$) și forma ω ce ne interesează poate fi aleasă egală cu

$$(5) \qquad \omega = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_{k+1} \ldots du_n.$$

Demonstrăm acum o lemă simplă din teoria formelor diferențiale de care avem nevoie pentru definirea distribuției $\delta(P_1, \ldots, P_k)$.

Lemă. Dacă $(n-k)$-forma γ este astfel încît produsul său cu k diferențiale independente $dP_1 \dots dP_k$ este nul, atunci există formele diferențiale $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, astfel ca

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \dots + \alpha_k dP_k.$$

Aici prin diferențială înțelegem diferențiala exterioară unei 0-forme (adică a unei funcții), iar independența diferențialelor înseamnă că

$$dP_1 \dots dP_k \neq 0.$$

Această k-formă se poate scrie

$$\sum_{j_1,\dots j_k} \frac{\partial P_1}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial P_2}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial P_k}{\partial x_{j_k}} dx_{j_1} \dots dx_{j_k} =$$

$$= \sum_{j_1<\dots<j_k} D\begin{pmatrix} P_1 \dots P_k \\ x_{j_1} \dots x_{j_k} \end{pmatrix} dx_{j_1} \dots dx_{j_k}.$$

Faptul că $dP_1 \dots dP_k \neq 0$ înseamnă că matricea derivatelor $\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots n)$ are rangul k. Rezultă de aici că funcțiile $P_1, \dots, P_k$ pot fi alese ca primele k funcții ale unui sistem local de coordonate în $\mathbf{R}^n$.

Pentru demonstrația lemei trecem la coordonatele indicate mai sus, $u_i = P_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, \dots, k)$ $u_{k+1}, \dots, u_n$. Forma diferențială γ se va reprezenta, în aceste coordonate prin termeni ce conțin diferențialele $du_1, \dots, du_k$ și prin termenul $q du_{k+1} \dots du_n$ ce nu conține astfel de diferențiale. Avem :

$$du_1 \dots du_k \gamma = q du_1 \dots du_n = 0$$

din ipotezele lemei. Cum toate diferențialele du_i sînt independente și deci cum produsul lor exterior nu poate fi nul, rezultă că $q \equiv 0$. Prin urmare forma γ constă doar din suma acelor termeni ce conțin cel puțin o diferențială du_i $(i = 1, \dots, k)$. Anume γ se poate reprezenta (în general în mai multe moduri)

$$\gamma = \alpha_1 du_1 + \dots + \alpha_k du_k,$$

adică

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \dots + \alpha_k dP_k$$

tocmai ceea ce trebuia arătat.

Definim acum distribuția $\delta(P_1, \dots, P_k)$ prin egalitatea

$$(6) \qquad (\delta(P_1, \dots, P_k),\ \varphi(x_1, \dots, x_n)) = \int_S \varphi\omega,$$

unde ω este forma despre care a fost vorba mai sus, iar S suprafața (1).

Se vede din formula (5) că această definiție coincide cu cea dată la începutul acestui paragraf.

Este ușor de arătat că această definiție nu depinde de alegerea formei ω. Într-adevăr, fie $dv = dP_1 \dots dP_k\omega = dP_1 \dots dP_k\tilde{\omega}$. Să arătăm că $\int \varphi(\omega - \tilde{\omega}) = 0$ pentru orice funcție test $\varphi(x)$. Conform lemei demonstrate $\omega - \tilde{\omega} = \alpha_1 dP_1 + \dots + \alpha_k dP_k$, în care α_i sînt $(n-k-1)$-forme. Este evident că de-a lungul suprafeței $P_1 = 0, \dots$ $\dots, P_k = 0$ această formă este nulă, adică distribuția $\delta(P_1, \dots, P_k)$ *este unic determinată de funcțiile* $P_1 \dots, P_k$.

Trebuie avut în vedere că forma ω și funcționala $\delta(P_1, \dots, P_k)$ se schimbă odată cu schimbarea ecuațiilor ce descriu suprafața S. Să vedem cum se modifică forma ω prin trecerea de la ecuațiile $P_1 = 0, \dots P_k = 0$ ale suprafeței S la ecuațiile $Q_1 = 0, \dots, Q_k = 0$, unde :

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ij}(x) P_i(x) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

iar matricea ale cărei elemente sînt funcțiile indefinit derivabile $\alpha_{ij}(x)$, este inversabilă. (Este evident că al doilea sistem de ecuații descrie aceeași suprafață ca și primul sistem.) Pentru aceasta scriem ecuațiile ce definesc forma inițială ω și cea modificată $\tilde{\omega}$,

$$dP_1 dP_2 \dots dP_k\omega = dv;$$

$$dQ_1 \dots dQ_k\tilde{\omega} = (\sum \alpha_{i1} dP_i) \dots (\sum \alpha_{ik} dP_i)\tilde{\omega} = dv.$$

Dezvoltînd termenii din paranteze și ținînd seama de regula de anticomutativitate $dP_i dP_j = -dP_j dP_i$, vedem că a doua ecuație se reduce la următoarea

$$\det \|\alpha_{ij}\| dP_1 \dots dP_k\omega = dv.$$

De aici

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\det \|\alpha_{ij}\|}\,\omega.$$

Aceasta este formula căutată de transformare a formei ω. Distribuţia corespunzătoare $\delta(Q_1, \ldots, Q_k)$ este legată de distribuţia $\delta(P_1, \ldots, P_k)$, prin egalitatea

$$(\delta(Q_1, \ldots, Q_k), \varphi) = \int \frac{\varphi\omega}{\det \|\alpha_{ij}\|} = \left(\delta(P, \ldots, P_k), \frac{\varphi}{\det \|\alpha_{ij}\|}\right).$$

Definim acum derivatele distribuţiei $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ în raport cu argumentele P_i, adică distribuţiile $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$. Aceste distribuţii vor fi definite ca integrale pe suprafaţa S $(P_1 = 0, \ldots, P_k = 0)$ a anumitor forme diferenţiale $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, depinzînd de funcţiile $P_1, \ldots, P_k$ şi de funcţia test $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ şi de derivatele sale pînă la ordinul m inclusiv.

Să notăm cu $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$ forma $\varphi\omega$ (aici ω este forma definită mai înainte de ecuaţia $dv = dP_1 \ldots dP_k\omega$). Pentru a defini de pildă forma $\omega_{10 \ldots 0}(\varphi)$ $\left(\text{a cărei integrală pe } S \text{ ne dă valoarea distribuţiei } \frac{\partial \delta(P_1, \ldots, P_k}{\partial P_k}\right)$, alegem $(n-1)$ forma

$$dP_2 \ldots dP_k \omega_{00 \ldots 0}(\varphi),$$

o diferenţiem şi reprezentăm n-forma obţinută astfel

$$d(dP_2 \ldots dP_k \omega_{00 \ldots 0}(\varphi)) = dP_1 \ldots dP_k \omega_{10 \ldots 0}(\varphi).$$

Posibilitatea unei astfel de operaţii se demonstrează uşor trecînd la un sistem local de coordonate. Într-adevăr, în coordonatele $u_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u_{k+1}, \ldots, u_n$, dacă notăm funcţia $\varphi(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n))$ prin $\tilde{\varphi}_1(u_1, \ldots, u_n) = \tilde{\varphi}_1(u)$,

obţinem :

$$(7)\quad \begin{cases} \omega_{00 \ldots 0}(\varphi) = \tilde{\varphi} D \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_{k+1} \ldots du_n, \\ dP_2 \ldots dP_k \omega_{00 \ldots 0}(\varphi) = \tilde{\varphi} D \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_2 \ldots du_k, \\ d(dP_2 \ldots dP_k \omega_{00 \ldots 0}(\varphi)) = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\tilde{\varphi} D \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right] du_1 \ldots du_n, \\ \omega_{10 \ldots 0}(\varphi) = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\tilde{\varphi}(u) D \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right] du_{k+1} \ldots du_n. \end{cases}$$

În mod asemănător, oricare dintre indicii formei $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$ se poate mări de la 0 la 1. În general, dacă presupunem că avem forma $\omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}(\varphi)$, atunci, pentru a mări cel de-al j-lea indice, înmulţim formula noastră la stînga cu toţi dP_i cu excepţia lui dP_j, diferenţiem şi reprezentăm forma obţinută astfel

$$(8)\quad \begin{aligned} &d(dP_1 \ldots dP_{j-1} dP_{j+1} \ldots dP_k \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)) = \\ &= (-1)^{j-1} dP_1 \ldots dP_k \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k}. \end{aligned}$$

În acest mod se definesc formele $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$ pentru orice valori nenegative ale indicilor.

Este evident că dacă forma iniţială $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$ nu este definită în mod unic, formele $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$ pot fi definite în mai multe feluri.

Vom arăta însă că formele $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$ definite inductiv plecînd de la $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$ prin egalităţi de forma (8) pentru orice $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ pot diferi numai prin forme de tipul

$$d\tau + \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k,$$

unde $d\tau$ — este diferenţiala unei $(n-k-1)$ forme τ, iar $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sînt $(n-k-1)$ forme arbitrare. În plus, forma τ, cît şi formele $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sînt cu suport compact, adică fiecare din aceste forme se anulează identic în afara unui anumit compact.

Demonstrația acestei afirmații se face prin inducție. După cum rezultă din lema demonstrată mai înainte, în întreg spațiul,

$$\omega_{00\ldots0} - \tilde{\omega}_{00\ldots0} = \beta_1 \, dP_1 \ldots + \beta_k dP_k$$

pentru orice două forme ce definesc pe $\delta(P_1, \ldots, P_k)$. Cum în primul rînd ambele forme $\omega_{00\ldots0}(\varphi)$ și $\tilde{\omega}_{00\ldots0}(\varphi)$ conțin ca factor funcția cu suport compact $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ și în al doilea rînd diferențialele $dP_1 \ldots$ $\ldots, dP_k$ sînt liniar independente, evident toate formele $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ce apar în membrul drept al egalității, sînt cu suport compact. Să presupunem acum că diferența a două forme oarecare cu indicii $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ se poate reprezenta în întreg spațiul sub forma

$$\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = d\tau + \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k, \tag{9}$$

în care $\tau, \beta_1, \ldots, \beta_k$ sînt forme cu suport compact, și să arătăm că prin majorarea unuia dintre indici (pentru a fixa ideile — primul indice) cu 1 această proprietate se păstrează. Pentru demonstrație înmulțim ambii membri ai egalității (9) cu $dP_2, \ldots, dP_k$ și apoi diferențiem. Cum $d(dP_i) = d(d\tau) = 0$, obținem

$$d[dP_2 \ldots dP_k(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1\ldots\alpha_k})] =$$

$$= dP_1 dP_2 \ldots dP_k(\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k}) =$$

$$= (-1)^k dP_1 \ldots dP_k d\beta_1.$$

Rezultă

$$dP_1 dP_2 \ldots dP_k(\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k} - (-1)^k d\beta_1) = 0$$

și, conform lemei

$$\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k} = (-1)^k d\beta_1 + \gamma_1 dP_1 + \ldots + \gamma_k dP_k,$$

iar din faptul că formele $\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k}$ și $\tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2\ldots\alpha_k}$ sînt cu suport compact, și formele $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sînt și ele cu suport compact, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Să considerăm acum egalitatea (9), valabilă după cum s-a arătat pentru orice indici $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pe suprafața S. Pe această suprafață $dP_1 = \ldots = dP_k = 0$, iar forma $d\tau$ este egală cu o anumită formă $d\tau^*$ (diferențiala exterioară a formei cu suport compact τ^*, ce se obține din forma τ prin proiecție pe suprafața S). Astfel, pe suprafața S :

$$\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = d\tau^*,$$

unde $d\tau^*$ este diferențiala formei cu suport compact τ^*.

Să definim acum distribuția $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ în modul următor :

$$\left(\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}, \varphi\right) = (-1)^m \int_S \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\varphi). \tag{10}$$

Se vede din formule de tipul (7) că această definiție coincide cu definiția dată la începutul acestui paragraf. Această definiție nu depinde de formele $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$: într-adevăr, dacă $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ și $\tilde{\omega}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ sînt două forme ce se obțin din $\omega_{00\ldots0}$ printr-un șir de înmulțiri, diferențieri și împărțiri, atunci din cele arătate

$$\int_S \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi) - \int_S \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi) = \int_S d\tau^*$$

Conform teoremei lui Stokes

$$\int_S d\tau^* = \int_\Gamma \tau^*,$$

Γ fiind frontiera suprafeței S. Dar, avînd în vedere ipotezele făcute asupra funcțiilor $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, suprafața S sau este închisă sau se întinde spre infinit. În ambele cazuri integrala $\int_\Gamma \tau^* = 0$ căci forma τ^* este cu suport compact, și prin urmare

$$\int_c \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \int_S \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}.$$

Astfel distribuția $\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ *este unic definită de funcțiile* $P_1, \ldots, P_k$ *pe suprafața* $P_1 = 0, \ldots, P = 0$.

Pentru distribuțiile $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ și $\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ au loc următoarele teoreme:

1. Distribuțiile $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ și $\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ se pot deriva ca funcțiile compuse:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(P_1 \ldots P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial x_j}.$$

Aici derivata unei distribuții în raport cu coordonatele x se definește ca de obicei, adică

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi\right) = -\left(\delta(P_1, \ldots, P_k), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. Distribuțiile $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ și derivatele lor verifică următoarele relații

$$P_i(\delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$P_i P_j \delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_1 P_2 \ldots P_k \delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

și toate relațiile ce se deduc din acestea prin derivare formală în raport cu $P_1, \ldots, P_k$. De pildă, derivînd succesiv prima identitate în raport cu P_i, obținem:

$$\delta(P_1, \ldots, P_k) + P_i \delta'_{P_i}(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m\delta^{(m-)}_{P_i \ldots P_i}(P_1, \ldots, P_k) + P_i(\delta^{(m)}_{P_i \ldots P_i}(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Derivarea se poate face în raport cu orice ansamblu de variabile

de exemplu derivînd a doua identitate în raport cu P_i și P_j obținem:

$$\delta(P_1, \ldots, P_k) + P_i \delta'_{P_i}(P_1, \ldots, P_k) + P_j \delta'_{P_j}(P_1, \ldots, P_k) +$$
$$+ P_i P_j \delta''_{P_i P_j}(P_1, \ldots, P_k) = 0.$$

Demonstrația acestor fapte se face analog cu cea a rezultatelor similare pentru $\delta(P)$ și o omitem.

În încheiere remarcăm că, în analogie cu cele precedente, putem defini un m-strat ca fiind o funcțională de tipul

$$\int \sum_{|\alpha|=m} \mu_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(P_1, \ldots, P_k)\, \varphi(x) \mathrm{d}x,$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$,

$$\delta^{(\alpha)}(P_1, \ldots, P_k) = \frac{\partial^{|\alpha|} \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}.$$

În particular, *un strat simplu* corespunde formulei

$$(\mu \delta(P_1, \ldots, P_k)\, \varphi) = \int \mu(x)\, \delta(P_1, \ldots, P_k)\, \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_S \omega_{00\ldots0}(\mu\varphi).$$

Se poate demonstra iarăși că orice funcțională de forma

$$(f, \varphi) = \int \sum a;(x) D^j \varphi(x)\, \mathrm{d}\sigma \quad \left(D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}\right),$$

unde $\mathrm{d}\sigma$ — este elementul de arie al suprafeței S, se poate reprezenta ca o sumă de straturi de diferite ordine.

§ 2. Distribuții atașate unei forme pătratice

În acest paragraf vor fi considerate diferite distribuții, în legătură cu o formă pătratică indefinită, nedegenerată. În punctele 2.1 și 2.2 vor fi construite efectiv regularizatele anumitor integrale fără a utiliza trecerea la domeniul complex. În celelalte puncte ale acestui paragraf se va folosi pe larg metoda convergenței în domeniul complex.

Metoda trecerii în complex este mai simplă și de aceea la o primă citire recomandăm a se începe cu studiul punctului 2.3, după ce în prealabil cititorul a luat cunoștință de conținutul punctelor 2.1 — 2.2 care conțin o serie de rezultate utile relative la distribuțiile asociate formelor pătratice.

2.1. **Definiția distribuțiilor** $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$. În § 1 au fost definite distribuțiile $\delta^{(k)}(P)$ pentru o funcție $P(x_1, \ldots, x_n)$, indefinit derivabilă și având proprietatea că suprafața $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ nu are puncte singulare. Dacă însă

$$(1) \qquad P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

$(p + q) = n)$, suprafața $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ este un con cu un punct singular (vîrful) în originea coordonatelor.

În acest caz distribuția $\delta^{(k)}(P)$ se poate defini în modul următor. Cum singura singularitate a conului $P = 0$ se găsește în origine, atunci pentru acele funcții φ care sînt identic nule într-o vecinătate a originii, $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ a fost în fapt deja definită în § 1 :

$$(2) \qquad (\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi \, dx = (-1)^k \int\limits_{P=0} \omega^k(\varphi).$$

Dacă φ este o funcție arbitrară indefinit derivabilă cu suport compact, atunci integrala (2) poate să fie divergentă. De aceea definim $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ ca regularizata integralei (2).

Vom urma acest plan ; vom proceda elementar fără a ne sprijini pe definiția lui $\int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi)$ dată în § 1.

Fie pentru început $\varphi(x)$ anulîndu-se într-o anumită vecinătate a originii coordonatelor. După îndepărtarea acestei vecinătăți suprafața $P = 0$ nu mai are puncte singulare. Prin urmare, în orice vecinătate suficient de mică a unui punct arbitrar al suprafeței $P = 0$ se pot introduce noi coordonate $u_1 = P, \ldots, u_n$ cu jacobianul $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} > 0$. Atunci, conform definiției distribuției $\delta^{(k)}(P)$ date în § 1, avem :

$$(3) \qquad (\delta^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int \frac{\partial^k}{\partial u_1^k} \left[\varphi D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right]_{u_1=0} du_2 \ldots du_n,$$

în care integrala se ia pe suprfața $P = 0$. Această definiție nu depinde de alegerea coordonatelor $u_1, \ldots, u_n$.

Într-adevăr, după cum s-a arătat în § 1, expresia scrisă anterior pentru $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ coincide cu $(-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi)$ și deci nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

Să scriem în mod explicit $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$, alegînd coordonatele $u_1, \ldots, u_n$ în mod special.

Vom presupune că $p > 1$ și $q > 1$; cazul în care p sau q sînt egale cu 1 va fi considerat la finele acestui punct.

Introducem coordonate bipolare, punînd

$$(4) \qquad x_1 = r\omega_1, \ldots, x_p = r\omega_p, \quad x_{p+1} = s\omega_{p+1}, \ldots, x_{p+q} = s\omega_{p+q},$$

unde

$$(5) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}, \quad s = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2}.$$

Elementul de volum în aceste coordonate este dat de formula

$$(6) \qquad dx = r^{p-1}s^{q-1} dr \, ds \, d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)},$$

în care $d\Omega^{(p)}$ (respectiv $d\Omega^{(q)}$) este elementul de arie al sferei unitate în spațiul cu p (respectiv cu q) dimensiuni.
În aceste coordonate

$$P = r^2 - s^2.$$

Să luăm acum ca nou sistem de coordonate pe P, r și coordonatele bipolare ω_i. Expresia (6) a elementului de volum în (acest coordonate va fi

$$dx = \frac{1}{2} (r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}} r^{p-1} dP dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}.$$

Conform definiției (3) avem

$$(7) \; (\delta^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int \frac{\partial^k}{\partial P^k} \left[\frac{1}{2} \varphi(r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}} \right]_{P=0} r^{p-1} dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}.$$

Trecînd de la P la variabila $s = (r^2 - \rho)^{1/2}$ și remarcînd că $\frac{\partial}{\partial P} =$

$= -\frac{\partial}{2s\partial s}$, obţinem:

$$(8) \qquad (\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\varphi}{2}\right]\Big|_{r=s} r^{p-1}dr\, d\Omega^{(p)}d\Omega^{(q)}.$$

Dacă punem acum

$$(9) \qquad \psi(r, s) = \int \varphi\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)},$$

atunci formula (8) devine

$$(10) \qquad (\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\psi(r, s)}{2}\right]_{s=r} r^{p-1}dr.$$

La alegerea noului sistem de coordonate în spaţiu, în locul lui r s-ar fi putut alege coordonata s. Am fi obţinut atunci expresia echivalentă

$$(10') \qquad (\delta^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left[r^{p-2}\frac{\psi(r, s)}{2}\right]_{r=s} s^{q-1}ds.$$

Din cauza ipotezei făcute la începutul raţionamentului, că funcţia φ este nulă într-o vecinătate a originii, integralele (10) şi (10') converg pentru orice k. Dar dacă $(p-1)+(q-2) \geqslant 2k$, adică dacă $k < \frac{p+q-2}{2}$, aceste integrale converg pentru *orice* funcţie $\varphi(x)$ cu suport compact. De aceea, pentru $k < \frac{p+q-2}{2}$ oricare din formulele (10) şi (10') se poate lua drept definiţie a distribuţiei $\delta^{(k)}(P)$. Dacă $k \geqslant \frac{p+q-2}{2}$, definim $(\delta_1^{(k)}(P), \varphi)$ şi $(\delta_2^{(k)}(P), \varphi)$ ca regularizatele integralelor (10) şi (10') într-un sens care va fi precizat puţin mai tirziu.

Astfel, pentru $p>1$, $q>1$ definim distribuţiile $\delta_1^{(k)}(P)$ şi $\delta_2^{(k)}(P)$ prin formulele

$$(11) \qquad (\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\psi(r, s)}{2}\right]\Big|_{s=r} r^{p-1}dr,$$

$$(11') \qquad (\delta_2^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left[r^{p-2}\frac{\psi(r, p)}{2}\right]\Big|_{s=r} s^{q-1}\,ds,$$

unde $\psi(r, s)$ este integrala funcţiei φ pe suprafaţa $x_1^2 + \ldots + x_p^2 = r^2$, $x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 = s^2$, împărţite cu $r^{p-1}s^{q-1}$. Integralele de mai sus converg şi sînt egale pentru

$$k < \frac{p+q-2}{2}.$$

Dacă

$$k \geqslant \frac{p+q-2}{2},$$

atunci aceste integrale trebuie înţelese ca regularizatele respective.

Să indicăm ce înţelegem prin regularizatele integralelor (11) şi (11'). Să remarcăm pentru început că funcţia $\psi(r, s)$ definită de formula (9) este o funcţie indefinit derivabilă, de r^2 şi s^2, cu suport compact. Făcînd în integrala (11) în mod formal schimbarea de variabile $r^2 = u$, $s^2 = v$ şi punînd

$$\psi(r, s) = \psi_1(u, v)$$

vom avea

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right)\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

Funcţia $\psi_1(u, v)$ este o funcţie cu suport compact, indefinit derivabilă în u şi v. Dar atunci

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right)\Big|_{v=u} = u^{\frac{q-2}{2}-k}\Psi(u),$$

unde $\Psi(u)$ este de asemenea o funcţie indefinit derivabilă. Astfel,

$$(12) \qquad (\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^{\frac{p+q}{2}-2-k}\Psi(u)du.$$

Regularizarea unor astfel de integrale a fost considerată în cap. I, § 3. Membrul drept al formulei (12) este valoarea $\frac{1}{4}(u_+^\lambda, \Psi(u))$ pentru $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$, unde u_+^λ este funcția egală cu u^λ pentru $u > 0$ și zero pentru $u \leqslant 0$. Regularizarea acestei funcții este distribuția u_+^λ, care pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ se obține prin prelungirea analitică a lui u_+^λ din semiplanul $\mathrm{Re}\lambda > -1$. Pentru $\lambda = -1, -2, \ldots$ această funcție analitică cu valori distribuții are poli simpli: distribuțiile $u_+^{-m}(m = 1, 2, \ldots)$ le-am definit ca fiind partea regulată a dezvoltării Laurent a lui u_+^λ în vecinătatea punctului $\lambda = -n$. Astfel, dacă *dimensiune spațiului* $n = p + q$ *este un întreg impar, atunci regularizata integralei* (12) *se definește ca fiind prelungirea analitică a funcției*

$$f(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^\lambda \Psi(u)\mathrm{d}u$$

în punctul $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$ (prin formulele indicate în cap. I § 3), *iar dacă dimensiunea n a spațiului este pară, ca partea regulată a dezvoltării Laurent a lui* $f(\lambda)$ *în jurul punctului* $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$.

În mod asemănător se definește și regularizata integralei (11'). În general se poate întîmpla ca distribuțiile $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ să nu coincidă. În § 2.3 va fi arătat că în cazul unui spațiu de dimensiune impară aceste distribuții coincid întotdeauna, iar în cazul dimensiunii pare n, dacă $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, diferența $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P)$ este o distribuție concentrată în vîrful conului $P = 0$. În plus, în § 2.3, se va da o altă definiție mai naturală a distribuțiilor omogene concentrate pe conul $P = 0$.

Să remarcăm că din definiția distribuțiilor $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ rezultă direct următoarea relație

$$\delta_2^{(k)}(P) = (-1)^k \delta_1^{(k)}(-P).$$

Pînă în prezent am presupus $p > 1$ și $q > 1$. Cazurile p sau q egale cu 1 sînt deosebite, în aceste cazuri trecerea la coordonate bipolare nu mai are sens. Să dăm definiția distribuțiilor $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ și în aceste cazuri.

Fie la început $p = q = 1$, adică $P = x^2 - y^2$. Alegînd drept coordonate locale P și x, obținem, în analogie cu formula (10), următoarea definiție a distribuției $\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2)$:

$$(\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{2y\partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x, y)}{2y}\right] \mathrm{d}x,$$

integrarea făcîndu-se pe fasciculul de drepte $x^2 - y^2 = 0$. Prin urmare;

$$(\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2), \varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{2y\ \partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x, y)}{2y}\right]\Big|_{y=x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{2y\ \partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x, y)}{2y}\right]\Big|_{y=-x} \mathrm{d}x.$$

Integralele se înțeleg și aici în sensul regularizatelor (și aici se folosesc ușor rezultatele cap. I, § 3). Avem în particular:

$$(\delta_1(x^2 - y^2), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi(x, y)}{2y}\Big|_{y=x} + \frac{\varphi(x, y)}{2y}\Big|_{y=-x}\right] \mathrm{d}x,$$

adică

$$\delta_1(x^2 - y^2) = \frac{1}{2y}\delta(x - y) + \frac{1}{2y}\delta(x + y). \tag{13}$$

Analog, dacă $p = 1$ și $q = n - 1 > 1$, distribuțiile $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ se definesc cu ajutorul formulelor

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{2s\ \partial s}\right)^k \left[s^{n-3}\frac{\psi(x_1, s)}{2}\right]\Big|_{s=|x_1|} \mathrm{d}x_1, \tag{14}$$

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_1\ \partial x_1}\right)^k \left(\frac{\psi(x_1\ s)}{2x_1}\right)\Big|_{x_1=s} s^{n-2}\,\mathrm{d}s +$$

$$+(-1)^k \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_1\ \partial x_1}\right)^k \left(\frac{\psi(x_1, s)}{2x_1}\right)\Big|_{x_1=-s} s^{n-2}\,\mathrm{d}s, \tag{14'}$$

în care $\psi(s_1, s)$ este integrala funcției φ pe suprafața $x_1 = \text{const}$, $x_2^2 + \ldots + x_n^2 = s^2$, împărțită la s^{q-1}.

Dacă $q = 1$ și $p = n - 1 > 1$, atunci distribuțiile $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ sînt definite de formulele

$$(15)\quad (\delta_2^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \left[r^{n-3}\frac{\psi(r, x_n)}{2}\right]\Big|_{r=|x_n|} \mathrm{d}x_n,$$

$$(15')\quad (\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_n \partial x_n}\right)^k \left(\frac{\psi(r_1, x_n)}{2x_n}\right)\Big|_{x_n=r} r^{n-2}\mathrm{d}r +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_n\,\partial x_n}\right)^k \left(\frac{(\psi(r, x_n)}{2x_n}\right)\Big|_{x_n=-r} r^{n-2}\,\mathrm{d}r,$$

unde $\psi(r, x_n)$ este integrala funcției φ pe suprafața $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = r^2$, $x_n = \text{const.}$, împărțită la r^{p-1}. Toate aceste integrale trebuie luate în sensul regularizării *.

2.2. **Distribuția P_+^λ.** Fie din nou

$$(1)\quad P(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \quad (p + q = n).$$

Definim distribuția P_+^λ, unde λ este un număr complex, prin formula

$$(2)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \int_{P>0} P^\lambda(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

* Să remarcăm că dacă $p = 1$ sau $q = 1$, se poate citeodată evita medierea lui φ pe sferă. Formulele (14') și (15') se pot reprezenta și sub forma următoare: dacă $p = 1$, atunci

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int \left(\frac{\partial}{2x_1\,\partial x_1}\right)^k \left(\frac{\varphi}{2x_1}\right) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

integrarea făcîndu-se pe suprafața conului $P = 0$; dacă $q = 1$, atunci

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \int \left(\frac{\partial}{2x_n\,\partial x_n}\right)^k \left(\frac{\varphi}{2x_n}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots dx_{n-1},$$

unde din nou integrarea se face pe suprafața conului $P = 0$.

cu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ și $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$. Pentru $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ integrala (2) converge și este o funcție analitică în λ. Prelungind analitic această funcție în domeniul $\mathrm{Re}\lambda > 0$, definim funcționala (P_+^λ, φ) și pentru alte valori ale lui λ.

Să căutăm polii funcționalei (P_+^λ, φ). Pentru aceasta scriem integrala (2) în coordonate bipolare

$$(3)\quad x_1 = r\omega_1, \ldots, x_p = r\omega_p, \; x_{p+1} = s\omega_{p+1}, \ldots, x_{p+q} = s\omega_{p+q},$$

unde

$$(4)\qquad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}, \quad s = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2}.*$$

Atunci integrala (2) devine

$$(5)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \int_{P>0} (r^2 - s^2)^\lambda \varphi r^{p-1} s^{q-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\Omega^{(p)}\,\mathrm{d}\Omega^{(q)},$$

unde $\mathrm{d}\Omega^{(p)}$ (respectiv $\mathrm{d}\Omega^{(q)}$) este elementul de arie al sferei unitate în spațiul p — dimensional (respectiv q — dimensional). Punînd ca în § 2.1:

$$(6)\qquad \psi(r, s) = \int \varphi \mathrm{d}\Omega^{(p)}\,\mathrm{d}\Omega^{(q)},$$

obținem

$$(7)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^{r} (r^2 - s^2)^\lambda = \psi(r, s)\, r^{p-1}\, s^{q-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r.$$

Pentru că funcția test $\varphi(x)$ este cu suport compact și indefinit derivabilă, funcția $\psi(r, s)$ definită de formula (6) va fi la rîndul său cu suport compact și indefinit derivabilă în raport cu r^2 și s^2. Efectuînd în integrala (7) schimbarea de variabile $u = r^2$, $v = s^2$ și notînd

$$(8)\qquad \psi(r, s) = \psi_1(u, v),$$

obținem

$$(9)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\int_0^{u} (u - v)^\lambda \psi_1(u, v) u^{\frac{p-2}{2}} v^{\frac{q-2}{2}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

* Pentru simplificare presupunem în tot ceea ce urmează că $p > 1$ și $q > 1$. Totuși toate rezultatele obținute rămîn valabile și în cazurile speciale $p = 1$ sau $q = 1$.

În sfirșit prin schimbarea de variabilă $v = ut$ aducem integrala (9) la forma

$$(10)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,du\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u,tu)\,dt.$$

Rezultă din formula (10) că funcționala (P_+^λ, φ) are două serii de poli. Prima serie constă din polii funcției

$$(11)\qquad \Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u_1, tu)\,dt.$$

Ca și funcția (x_+^λ, φ), considerată în cap. I, § 3, această funcție este regulată pentru orice λ, cu excepția punctelor

$$\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots,$$

în care are poli simpli. În acești poli

$$(12)\qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\cdot\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, tu)\right]\Big|_{t=1}.$$

Prin urmare, $\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda, u)$ este o funcțională concentrată pe suprafața conului $P = 0$.

Pe de altă parte, dacă $\Phi(\lambda, u)$ este o funcție regulată, atunci integrala

$$(13)\qquad (P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi(\lambda, u)\,du$$

poate să mai aibă poli în punctele

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots -\frac{n}{2}-k, \ldots,$$

unde $n = p + q$ este dimensiunea spațiului. În aceste puncte

$$(14)\qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\Phi\left(-\frac{n}{2}-k, u\right)\Big|_{u=0},$$

și deci $\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P_+^\lambda, \varphi)$ este o funcțională concentrată în vîrful conului.

Prin urmare, *există două serii de puncte singulare ale funcționalei* (P_+^λ, φ):

$$(15)\qquad \lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$$

și

$$(15')\qquad \lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$$

$\operatorname{Res}(P_+^\lambda, \varphi)$ *este o funcțională concentrată pe suprafața conului* $P=0$ *dacă* λ *aparține primei serii, și în vîrful conului* $P = 0$ *dacă* λ *aparține celei de a 2-a serii de puncte.*

În cazul în care λ aparține simultan ambelor serii, situația evident poate fi mai complicată.

Să considerăm separat mai amănunțit toate cazurile ce se pot ivi.

Cazul 1. Punctul singular $\lambda = -k$ *aparține primei serii dar nu aparține celei de a 2-a serii de puncte singulare.*

Aceasta se întîmplă întotdeauna atunci cînd dimensiunea spațiului $n = p + q$ este impară, și de asemenea în cazul dimensiunii pare a spațiului, dacă $\lambda > -\frac{n}{2}$.

Să reprezentăm funcția (11) în vecinătatea punctului $\lambda = -k$, sub forma

$$(16)\qquad \Phi(\lambda, u) = \frac{\Phi_0(u)}{\lambda + k} + \Phi_1(\lambda, u),$$

unde $\Phi_0(u) = \operatorname*{Res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda, k)$, iar funcția $\Phi_1(\lambda, u)$ este regulată în vecinătatea punctului $\lambda = -k$. Introducînd această expresie în formula (13) obținem:

$$(17)\quad (P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{\lambda + k}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi_0(u)\,du + \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi_1(\lambda, u)\,du.$$

Din ipoteza făcută relativ la λ, integralele din formula (17) sînt funcţii regulate în vecinătatea punctului $\lambda = -k$. Prin urmare, funcţia (P_+^λ, φ) are în acest punct un pol simplu, şi

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{-k+1/2(p+q)-1}\,\Phi_0(u)\,du,$$

unde, pentru $k \geqslant \dfrac{p+q}{2}$, integrala trebuie luată ca regularizată. Ţinînd seama de valoarea lui $\Phi_0 = \operatorname*{Res}_{\lambda=-k}\Phi(\lambda, u)$ dată de (12), obţinem:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}(P_+^\lambda \varphi) =$$

(18)

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{(q-2)/2}\,\psi_1(u, tu)\right]|_{t=1}\,u^{-k+1/2(p+q)-1}\,du.$$

Astfel, $\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda$ este o distribuţie, concentrată pe conul $P = 0$.

Să stabilim legătura între această distribuţie şi distribuţia $\delta_1^{(k)}(P)$ definită în § 2.1. Să remarcăm că dacă punem $tu = v$, atunci

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, tu)\right]|_{t=1} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, v)\right]|_{v=u}\,u^{-\frac{q}{2}+k}.$$

Prin urmare formula (18) poate fi rescrisă sub forma

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, v)\right]|_{v=u}\,u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

unde pentru $k \geqslant \dfrac{n}{2}$, integrala trebuie înţeleasă în sensul regularizării. Pe de altă parte, conform definiţiei date în § 2.1:

$$(\delta_1^{(k-1)}(P), \varphi) = \frac{1}{4}\int_Q^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, v)\right]|_{v=u}\,u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

unde iarăşi, pentru $k \geqslant \dfrac{n}{2}$ integrala trebuie regularizată. Dar în cazul în care dimensiunea $n = p + q$ a spaţiului este un număr impar, regularizarea integralei anterioară se defineşte prin prelungire analitică. Ca atare

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\delta_1^{(k-1}(P), \varphi).$$

Astfel, *în punctul* $\lambda = -k (k = +1, +2, \ldots)$, *în cazul în care dimensiunea* n *a spaţiului este impară, şi în cazul în care dimensiunea* n *este pară iar* $k < \dfrac{n}{2}$, *distribuţia* P_+^λ *are un pol simplu de reziduu*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P). \tag{19}$$

Acest rezultat nu este surprinzător. Într-adevăr, încă în cap. I, am stabilit că

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta^{(k-1)}(x).$$

Din formula (19) rezultă că *în cazul spaţiului cu un număr impar de dimensiuni, şi de asemenea în cazul unui număr par de dimensiuni pentru* $k < \dfrac{n}{2}$, *distribuţia* $\delta_1^{(k-1)}(P)$ *este complet determinată dacă se dă forma pătratică* P.

În § 2.1 s-a remarcat că distribuţia $\delta_1^{(k)}(P)$ poate fi definită de formula

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int_{P=0} \omega_k(\varphi),$$

integrala respectivă fiind convergentă pentru $k < \dfrac{n-2}{2}$ iar pentru $k \geqslant \dfrac{n-2}{2}$ trebuind luată regularizata sa. Prin urmare

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{P=0} \omega_k(\varphi).$$

Avem în particular

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-1}(P_+^\lambda, \varphi) = \int \frac{\varphi(x)\mathrm{d}\sigma}{|\operatorname{grad} P|},$$

unde $\mathrm{d}\sigma$ este elementul de arie al conului $P = 0$.

Cazul 2. Punctul singular λ aparţine celei de a 2-a serii de puncte singulare dar nu aparţine primei serii.

Aceasta se întîmplă dacă $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) şi dimensiunea spaţiului n este un număr impar.

În acest caz funcţia $\Phi(\lambda, u)$ este regulată în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ şi deci funcţia

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{\lambda+(n/2)-1}\, \Phi(\lambda, u)du$$

are în acest punct un pol simplu de reziduu

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k} \int_0^\infty u^{\lambda+(n/2)-1}\, \Phi\left(-\frac{n}{2} - k, u\right)\mathrm{d}u,$$

şi deci

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k \Phi(-n/2 - k, u)}{\partial u^k}\bigg|_{u=0}. \tag{20}$$

Astfel, $\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^\lambda, \varphi)$ este o funcţională avînd drept suport originea coordonatelor.

Să exprimăm valoarea acestei funcţionale direct, cu ajutorul valorilor derivatelor funcţiei $\varphi(x)$ în origine:

Pentru $\lambda = -\frac{n}{2}$, formula (20) dă

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)}(P_+^\lambda, \varphi) = \Phi\left(-\frac{n}{2}, 0\right).$$

Folosind expresia (11) a funcţiei $\Phi(\lambda, u)$, obţinem:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^{-n/2}\, t^{(q-2)/2}\, \mathrm{d}t\, \psi_1(0, 0).$$

Dar

$$\int_0^1 (1-t)^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{q-2}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}+1\right)}.$$

Dacă p este un număr par, atunci $\Gamma(-p/2 + 1) = \infty$ şi deci

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2}(P_+^\lambda, \varphi) = 0. \tag{21}$$

Fie acum p impar, iar q par. Conform definiţiilor (8) şi (6) avem:

$$\psi_1(0, 0) = \psi(0, 0) = \int \varphi(0)\, \mathrm{d}\Omega^{(p)}\, \mathrm{d}\Omega^{(q)},$$

şi deci

$$\psi_1(0, 0) = \Omega_p \Omega_q \varphi(0).$$

unde cu Ω_p şi Ω_q s-au notat ariile sferelor unitate în spaţiul cu p — respectiv cu q — dimensiuni. Prin urmare

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{\Gamma(q/2)\,\Gamma(1-n/2)}{4\Gamma(1-p/2)}\, \Omega_p \Omega_q \varphi(0),$$

adică

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} P_+^\lambda = \frac{\Gamma(q/2)\Gamma(1-n/2)}{4\Gamma(1-p/2)}\, \Omega_p \Omega_q \delta(x). \tag{22}$$

După cum se ştie, aria Ω_s a sferei unitate în spaţiul s-dimensional este dată de formula

$$\Omega_s = \frac{2\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}.$$

Introducînd în (22) expresiile lui Ω_p și Ω_q obținem după calcule elementare

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{q/2}\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x). \tag{23}$$

Pentru a găsi reziduurile lui P_+^λ pentru $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, cu $k = 1, 2, \ldots$, considerăm operatorul diferențial omogen

$$L = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

adică

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \tag{24}$$

Un calcul direct arată că,

$$LP^{\lambda+1} = 2(\lambda+1)(2\lambda+n)P^\lambda, \tag{25}$$

cu $n = p + q$.

Pe de altă parte, pentru orice funcție cu suport compact, indefinit derivabilă, $\varphi(x)$, are loc formula

$$\int_{P>0} [\varphi(LP^{\lambda+1}) - P^{\lambda+1}(L\varphi)]\mathrm{d}x = 0^*. \tag{26}$$

Să introducem în formula (26) expresia $LP^{\lambda+1}$ dată de (25); obținem:

$$\int_{P>0} P^\lambda \varphi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^2(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)} \int_{P>0} P^{\lambda+1}(L\varphi)\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{2^2(\lambda+1)(\lambda+n/2)}(P_+^{\lambda+1}, L\varphi). \tag{27}$$

* Într-adevăr, dacă $\mathrm{Re}\lambda > 0$, din formula lui Green rezultă că această integrală se reduce la integrala pe suprafața $P = 0$. Dar cum pe această suprafață funcția $P^{\lambda+1}$ și derivatele sale parțiale se anulează, integrala este egală cu zero. Din unicitatea prelungirii analitice, formula (26) rămîne valabilă și pentru $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Aplicînd k-ori formula (27) vom avea:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}(P_+^{\lambda+k}, L^k\varphi).$$

Prin urmare,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k}(P_+^\lambda, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)-\ldots(\lambda+k)(\lambda+n/2)\ldots(\lambda+n/2+k-1)}\Bigg|_{\lambda=-n/2-k} \times$$

$$\times \operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^{\lambda+k}, L^k\varphi). \tag{29}$$

Dar

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^{\lambda+k}, L^k\varphi) = \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2}(P_+^\lambda, L^k\varphi).$$

De aceea, dacă p este par, atunci acest reziduu, conform formulei (21) va fi nul. Dacă p este impar, atunci, conform lui (23) avem:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P^{\lambda+k}, L^k\varphi) = \frac{(-1)^{q/2}\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}(\delta(x), L^k\varphi).$$

Introducînd această expresie în formula (29) și ținînd seama că

$$(\delta(x), L^k\varphi) = (L^k\delta(x), \varphi,)$$

obținem după calcule elementare

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{(-1)^{q/2}\pi^{n/2}}{2^{2k}k!\,\Gamma(n/2+k)}(L^k\,\delta(x), \varphi).$$

Astfel, dacă *dimensiunea spațiului este un număr impar*, atunci dacă p este impar iar q par, *distribuția* P_+^λ *are în punctele* $\lambda = -\frac{n}{2} - k (k = 0, 1, \ldots)$ *poli simpli cu reziduurile*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \right.$$

$$\left. - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^k \delta(x). \tag{30}$$

Dacă dimpotrivă, p este par iar q impar, funcția P_+^λ va fi regulată în aceste puncte.

Cazul 3. Punctul λ aparține simultan ambelor serii de puncte singulare. Aceasta se întîmplă în cazul spațiului cu un număr par de dimensiuni pentru toți

$$\lambda = -\frac{n}{2} - k \quad (k = 0,1, \ldots).$$

Ca și în cazul 1, reprezentăm (P_+^λ, φ) sub forma

$$(P_+^\lambda \varphi) = \frac{1}{\lambda + \frac{n}{2} + k} \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{n}{2} - 1} \Phi_0(u)\,du + \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1} \Phi_1(\lambda, u)\,du,$$

(31)

în care $\Phi_0(u) = \operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2} - k} \Phi(\lambda, u)$, iar $\Phi_1(\lambda, u)$ este o funcție regulată în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$. Din ipotezele făcute, fiecare din integralele ce figurează în formula (31) pot avea în punctul $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ un pol simplu.

Deci *funcția* (P_+^μ, φ) *poate avea în punctul* $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ *un pol de ordinul 2.*

În vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ funcția P_+^λ se poate deci dezvolta în serie Laurent

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{(\lambda + n/2 + k)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda + n/2 + k} + \ldots$$

Vom căuta coeficienții $c_{-2}^{(k)}$ și $c_{-1}^{(k)}$ ai acestei dezvoltări.

Mai întîi, rezultă din (31) că

$$(32) \qquad (c_{-2}^{(k)}, \varphi) = \operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2} - k} \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{n}{2} - 1} \Phi_0(u)\,du = \frac{1}{k!} \Phi_0^{(n)}(0).$$

Astfel, distribuția $c_{-2}^{(k)}$ este concentrată în vîrful conului $P = 0$. Exprimăm direct pe $c_{-2}^{(k)}$ cu ajutorul derivatelor lui $\delta(x)$. Mai întîi, pentru $k = 0$, formula (32) dă

$$c_{-2}^{(0)} = \Phi_0(0).$$

Prin definiție,

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{4} \operatorname*{Res}_{\lambda = -n/2} \int_0^1 (1-t)^\lambda\, t^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, tu)\,dt.$$

Obținem de aici

$$\Phi_0(0) = \frac{1}{4} \psi_1(0, 0) \operatorname*{Res}_{\lambda = -n/2} \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{(q-2)/2} dt =$$

$$= \psi_1(0, 0) \operatorname*{Res}_{\lambda = -n/2} \frac{\Gamma(q/2)\Gamma(\lambda + 1)}{4\Gamma(\lambda + q/2 + 1)}.$$

În virtutea cunoscutei relații pentru funcția Γ,

$$\Gamma(1 - x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

avem:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{q}{2} + 1\right)} = \frac{\sin \pi\left(-\frac{q}{2} - \lambda\right)}{\sin \pi(-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda - \frac{q}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}.$$

Cum, pe de altă parte,

$$\lim_{\lambda = -n/2} \frac{\lambda + n/2}{\sin(-\pi\lambda)} = \frac{(-1)^{(q/2)+1}}{\pi},$$

rezultă

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{q}{2} + 1\right)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}+1} \left[\sin \pi\left(-\frac{q}{2} - \lambda\right) \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda - \frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma(-\lambda)} \right]_{\lambda = -\frac{n}{2}}$$

Astfel,

$$\text{(33)}\quad \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin\frac{\pi p}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ţinînd seama că

$$\psi_1(0, 0) = \Omega_p\Omega_q\varphi(0),$$

unde Ω_p şi Ω_q sînt ariile sferelor de rază 1, obţinem

$$\text{(34)}\quad (c^0_{-2}, \varphi) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin\frac{\pi p}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Omega_p\Omega_q\varphi(0).$$

Dacă p este un număr par, atunci $c^{(0)}_{-2} = 0$, căci $\sin\frac{\pi p}{2} = 0$.

Prin urmare, atunci cînd p şi q sînt pare, funcţia P^λ_+ are în punctul $\lambda = -\frac{n}{2}$ doar un pol simplu.

Dacă atît p cît şi q sînt impare, formula (34) ne dă,

$$(c^{(0)}_{-2}, \varphi) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \varphi(0),$$

pentru că în acest caz

$$\sin\frac{\pi p}{2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},\quad \Omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)},\quad \Omega_q = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)},$$

deci, *pentru p şi q impari*

$$\text{(35)}\quad c^{(0)}_{-2} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta(x).$$

Aplicînd acum formula (28) şi repetînd întocmai calculele făcute pentru cazul 2, se stabileşte *că pentru p şi q pari, $c^{(k)}_{-2} = 0$, adică funcţia*

P^λ_+ are în punctul $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ doar un pol simplu. Dacă atît p cît şi q sînt impare, atunci

$$c^{(k)}_{-2} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}.$$

(36)

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)^k \delta(x).$$

Să calculăm acum distribuţia $c^{(k)}_{-1}$. Din formula (31) rezultă

$$(c^{(k)}_{-1}, \varphi) = \int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du + \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k, u\right)du.$$

(37)

Prima dintre integralele din formula (37) trebuie înţeleasă ca termenul liber al dezvoltării Laurent a funcţiei

$$f(\lambda) = \int_0^\infty u^{\lambda+(n/2)-1}\,\Phi_0(u)du$$

în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$. Valoarea acestei integrale este o funcţională concentrată pe suprafaţa $P = 0$ pe care o definim acum. Pentru că

$$\Phi_0(u) = \operatorname*{Res}_{\lambda=-k} \Phi(\lambda, u),$$

din formula (21) conchidem că:

$$\Phi_0(u) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!} \cdot \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial t^{\frac{n}{2}+k-1}} [t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu)]|_{t=1} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!} \cdot \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}} [v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, v)]|_{v=u}\, u^{\frac{n}{2}+k-\frac{q}{2}}.$$

De aici rezultă

$$\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

Pe de altă parte, conform definiției date în § 2.1.

$$(\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P),\varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

Aici regularizata integralei a fost definită exact ca și regularizata integralei $\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du$. Prin urmare,

$$\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}(\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P),\varphi). \tag{38}$$

Din formula (38) rezultă, în particular, că *dacă spațiul este de dimensiune pară și* $k > \frac{n}{2}$, *distribuția* $\delta_1^{(k-1)}(P)$ *este perfect definită de forma pătratică* P.

Să considerăm acum al doilea termen al formulei (37). Avem:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\,u\right)du = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\,u\right)}{\partial u^k} \tag{39}$$

Funcționala definită de acest termen are deci suportul redus la vîrful conului $P=0$. Astfel,

$$e_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P) + \alpha^{(k)} \tag{40}$$

unde $\alpha^{(k)}$ este o distribuție avînd drept suport vîrful conului $P=0$ și care se exprimă cu ajutorul funcționalei (39):

$$(\alpha^{(k)},\varphi) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\,u\right)}{\partial u^k}\Big|_{u=0} \tag{41}$$

Să găsim forma explicită a funcționalei $\alpha^{(k)}$ cu ajutorul derivatelor distribuției $\delta(x)$. Considerăm la început cazul $k=0$. Conform formulei (41),

$$(\alpha^{(0)},\varphi) = \Phi_1\left(-\frac{n}{2},\,0\right).$$

Dar $\Phi_1\left(-\frac{n}{2},\,0\right)$ este termenul liber al dezvoltării Laurent a funcției $\Phi(\lambda,0)$ în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2}$. Avem:

$$\Phi(\lambda,0) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\,dt\psi_1(0,0) = \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}\Omega_p\Omega_q\varphi(0).$$

Folosind atît relația $\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, cît și expresiile lui Ω_p, Ω_q putem rescrie această formulă sub forma,

$$\Phi(\lambda,0) = \frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\,\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}$$

Dacă p și q sînt numere pare, funcția de mai sus este regulată pentru $\lambda = -\frac{n}{2}$. Prin urmare $\Phi_1\left(-\frac{n}{2},0\right) = \Phi\left(-\frac{n}{2},0\right)$, de unde

$$(\alpha^{(0)},\varphi) = (-1)^{\frac{q}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\varphi(0).$$

Dacă p și q sînt impare, funcția $\Phi(\lambda, 0)$ are un pol în punctul $\lambda = -\frac{n}{2}$. În acest caz $(\alpha^{(0)}, \varphi) = \Phi_1\left(-\frac{n}{2}, 0\right) = \chi\varphi(0)$, în care χ este termenul liber din dezvoltarea Laurent a funcției $\frac{\sin\pi(\lambda+q/2)\Gamma(-\lambda-q/2)}{\sin\pi\lambda\Gamma(p/2)} \times \pi^{n/2}$ în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2}$. Calcule elementare, pe care le omitem, conduc la următoarea expresie a coeficientului χ:

$$\chi = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \pi^{\frac{n}{2}-1},$$

adică

$$\chi = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right), \tag{42}$$

unde funcția ψ este definită de formula

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} *).$$

Introducînd valoarea obținută pentru $\alpha^{(0)}$ în formula (40), obținem pentru $k = 0$:

$$c_{-1}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} [(-1)^{\frac{n}{2}-1} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(P) + \theta\pi^{\frac{n}{2}} \delta(x)], \tag{43}$$

*) Valorile funcției $\psi(x)$ pentru valori întregi și semiîntregi ale argumentului sînt date de formulele următoare

$$\psi(k) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1},$$

$$\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) = -C - 2\ln 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1}\right),$$

unde C este constanta lui Euler. (v. I. M. Rîjik și I. S. FGradstein, *Tabele* ... secția 6.35.)

în care $\theta = (-1)^{q/2}$ dacă p și q sînt ambele pare, iar $\theta = (-1)^{(q+1)/2} \frac{1}{\pi}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)$, dacă p și q sînt impare.

În sfîrșit, pentru a găsi $c_{-1}^{(k)}$ pentru k arbitrar se poate utiliza din nou formula „de coborîre" (28). Obținem:

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left[(-1)^{\frac{n}{2}+k-1} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \right.$$

$$\left. + \theta_{p,q} \frac{\pi_2^n}{2^{2k}\, k!} P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x)\right]. \tag{44}$$

Aici coeficientul numeric $\theta_{q,p}$ este egal cu $(-1)^{q/2}$ atunci cînd p și q sînt pare.

Expresia lui $\alpha^{(k)}$ se poate obține și din următoarele considerații. Cum $c_{-1}^{(k)} = \operatorname{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_+^\lambda$ este o distribuție omogenă de grad $-n-2k$, acest lucru va fi adevărat și pentru $\alpha^{(k)}$. Dar distribuțiile $\alpha^{(k)}$ sînt concentrate în origine, și deci vor fi de forma *):

$$\alpha^{(k)} = Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x),$$

unde Q_{2k} este polinom omogen de grad $2k$.

Pe de altă parte, distribuția $\alpha^{(k)}$ ca și distribuția P_+^λ pentru orice valoare a lui λ este invariabilă la transformările liniare care invariază forma pătratică

$$P(x_1, \ldots, x_{p+q}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Prin urmare, și operatorul $Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ trebuie să fie invariant la aceste transformări. Unicul operator verificînd aceste condiții este operatorul

$$Q_{2k} = c_{k,p,q} P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right).$$

Astfel,

$$\alpha^{(k)} = c_{k,p,q} P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x).$$

* În al doilea volum se va demonstra că o distribuție avînd suportul redus la un singur punct se poate reprezenta ca o combinație liniară de distribuția δ și de derivatele sale.

Coeficientul $c_{k,p,q}$ se poate găsi din expresia (41) dacă în această expresie se introduce o funcție fixată oarecare.

Alegem funcția φ, avînd în vecinătatea originii următoarea formă:

$$\varphi(x) = (x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2)^k.$$

Atunci, după cum rezultă din (6) și (8), funcția $\psi_1(u, tu)$ are în vecinătatea punctului $u = 0$ forma

$$\psi_1(u, tu) = \Omega_p \Omega_q u^k (1 - t)^k.$$

Prin urmare, conform formulei (11),

$$\Phi(\lambda, u) = \left(\frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^{\lambda+k} t^{\frac{q-2}{2}} \, dt \, \Omega_p \Omega_q \right) u^k,$$

adică

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)\, \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + k + \frac{q}{2} + 1\right)} \Omega_p \Omega_q u^k.$$

Funcția $\Phi_1\left(-\frac{n}{2} - k, u\right)$ cu ajutorul căreia se exprimă $(\alpha^{(k)}, \varphi)$ este termenul liber al dezvoltării Laurent a funcției $\Phi(\lambda, u)$ în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$.

Să considerăm, pentru a fixa ideile, cazul cînd p și q sînt impare. Cum coeficienții dezvoltării Laurent ai funcției $\frac{\Gamma(\lambda + k + 1)\, \Gamma(q/2)}{\Gamma(\lambda + k + q/2 + 1)}$ în vecinătatea lui $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ coincid cu coeficienții dezvoltării Laurent ai funcției $\frac{\Gamma(\lambda + 1)\, \Gamma(q/2)}{\Gamma(\lambda + q/2 + 1)}$ în vecinătatea lui $\lambda = -\frac{n}{2}$, avem:

$$\Phi_1\left(-\frac{n}{2} - k, u\right) = \varkappa u^k,$$

unde coeficientul χ este dat de formula (42). Formula (41) ne dă:

$$(\alpha^{(k)}, \varphi) = \chi = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right) \right). \tag{45}$$

Pe de altă parte,

$$(\alpha^{(k)}, \varphi) = c_{k,p,q} P^k \varphi^{(x)}|_{x=0}.$$

Conform formulei (25) aplicate de k ori,

$$P^k \varphi(x) = 2^{2k} k! \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \ldots \left(\frac{n}{2} + k - 1\right). \tag{46}$$

Comparînd expresiile (45) și (46), obținem:

$$c_{k,p,q} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right) \right),$$

în care p și q sînt numere impare.

Astfel, *coeficientul* $\theta_{p,q}$ *din formula* (44), *în cazul în care* p *și* q *sînt impare, este de forma*

$$\theta_{p,q} = \frac{(-1)^{(q+1)/2}}{\pi} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right) \right).$$

Prin urmare, dacă dimensiunea spațiului n *este pară, iar* p *și* q *sînt ambele pare, atunci* P_+^λ *are în punctul* $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *un pol simplu de reziduu*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2} - k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \delta^{\left(\frac{n}{2}+\nu-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} I^k \delta(x),$$

unde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}.$$

Dacă p și q sînt impare, atunci în punctul $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, P_+^λ are un pol de ordinul 2. Coeficienții $c_{-2}^{(k)}$ și $c_{-1}^{(k)}$ ai dezvoltării Laurent a funcției P_+^λ

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-1}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(l)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \ldots$$

în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ se exprimă prin formulele

$$c_2^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} L^k \delta(x)$$

și

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2^{2k}\, k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} L^k \delta(x)$$

unde $\psi(x)$ este dată de $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Odată cu funcționala P_+^λ se poate defini și funcționala P_-^λ cu ajutorul formulei

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{-P>0} (-P)^\lambda \varphi \, dx. \tag{47}$$

Toate cele spuse mai sus în legătură cu P_+^λ rămîn valabile și pentru P_-^λ; trebuie doar schimbate p și q între ele și în formulele de mai sus trebuie înlocuit $\delta_1^{(k)}(P)$ cu $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$.

2.3. **Distribuțiile $\mathfrak{Q}^\lambda$ corespunzînd unei forme pătratice cu coeficienții complecși.** Pînă în momentul de față am considerat exclusiv

forme pătratice cu coeficienți reali. În acest punct vom considera spațiul tuturor formelor pătratice,

$$\mathfrak{Q} = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s \tag{1}$$

cu coeficienți complecși.

Scopul nostru este de a defini distribuția $\mathfrak{Q}^\lambda$, λ fiind un număr complex. Totuși, în cazul general, $\mathfrak{Q}^\lambda$ nu va fi o funcție uniformă de λ. De aceea în spațiul tuturor formelor pătratice

$$\mathfrak{Q} = P_1 + iP_2$$

vom introduce „semiplanul superior" al *formelor pătratice cu partea imaginară pozitiv definită* și pentru aceasta vom defini funcția $\mathfrak{Q}^\lambda$. Anume, dacă forma pătratică $\mathfrak{Q}$ aparține acestui „semiplan", vom pune

$$\mathfrak{Q}^\lambda = e^{\lambda(\ln|P| + i \arg P)},$$

unde $0 < \arg \mathfrak{Q} < \pi$. O astfel de funcție $\mathfrak{Q}^\lambda$ va fi o funcție analitică uniformă de λ.

Facem acum să corespundă funcției $\mathfrak{Q}^\lambda$ distribuția

$$(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi) = \int \mathfrak{Q}^\lambda \varphi \, dx, \tag{2}$$

în care integrarea se face pe întreg spațiul. Integrala (2) converge pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ și este în acest semiplan o funcție analitică de λ. Prelungind analitic această funcție vom putea defini funcționala $(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi)$ și pentru alte valori ale lui λ.

Pentru formule pătratice $\mathfrak{Q}$ cu parte imaginară pozitiv definită, vom găsi acum punctele singulare ale funcției $\mathfrak{Q}^\lambda$ și vom calcula reziduurile acestei funcții în punctele singulare. Calculul se poate simplifica în mod esențial dacă urmăm o cale ce va fi folosită în continuare.

Distribuția $\mathfrak{Q}^\lambda$ depinde analitic nu numai de λ ci și de coeficienții formei pătratice $\mathfrak{Q}$. $\mathfrak{Q}^\lambda$ apare deci ca o funcție analitică definită în „semiplanul superior" al tuturor formelor pătratice $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 + i\mathfrak{Q}_2$, unde $\mathfrak{Q}_2$ este o formă pozitiv definită. Prin urmare $\mathfrak{Q}^\lambda$ va fi determinată de valorile sale pe „axa imaginară", adică pe mulțimea matricelor de forma $\mathfrak{Q} = iP_2$ cu P_2 formă pozitiv definită. Din acest motiv este suficient de considerat cazul distribuțiilor de forma $(iP_2)^\lambda$. Dar în acest caz problema a fost deja rezolvată în cap. I, § 3, căci forma pozitiv definită P_2 se poate întotdeauna reduce — printr-o transformare liniară nedegenerată — la o sumă de pătrate.

Astfel, fie la început forma $\mathfrak{Q} = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$ aparținînd „axei imaginare". Aceasta înseamnă că $g_{rs} = \mathrm{i}a_{rs}(r, s = 1, \ldots, n)$ cu a_{rs} numere reale, iar forma $\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s$ este pozitiv definită. În acest caz:

$$(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi) = \mathrm{e}^{\frac{\pi\lambda\mathrm{i}}{2}} \int (\Sigma a_{rs}x_r x_s)^\lambda \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Printr-o transformare liniară $x_r = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs}x'_s$ putem reduce forma $\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s$ la $r^2 = x_1'^2 + \ldots + x_n'^2$. Jacobianul acestei transformări este $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, unde $|a|$ este discriminantul formei pătratice $\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s$:

$$|a| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Astfel:

$$(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\lambda\mathrm{i}}{2}}}{\sqrt{(-1)^n|g|}} \int r^{2\lambda}\varphi \, \mathrm{d}x',$$

fie

$$(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\lambda\mathrm{i}}{2}}}{\sqrt{|a|}} \int r^{2\lambda}\varphi \mathrm{d}x', \tag{3}$$

unde $|g|$ este discriminantul formei $\mathfrak{Q}$, iar $\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}$ este radicalul aritmetic ($(-\mathrm{i})^n|g|$ este un număr real pozitiv).

Funcționala $(r^{2\lambda}, \varphi)$ a fost deja considerată în § 3.9, cap. I. Conform formulelor stabilite acolo, singurele singularități ale acestei funcționale, și prin urmare ale funcționalei $(\mathfrak{Q}^\lambda, \varphi)$ sînt poli simpli în punctele $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots$; în plus

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2}} r^{2\lambda} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta(x).$$

Prin urmare,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2}} \mathfrak{Q}^\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi n\mathrm{i}}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta(x). \tag{4}$$

Să găsim reziduurile funcției $\mathfrak{Q}^\lambda$ și în celelalte puncte singulare. Pentru aceasta facem să-i corespundă formei $\mathfrak{Q}$ operatorul diferențial

$$L_{\mathfrak{Q}} = \Sigma g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}, \tag{5}$$

ai cărui coeficienți g^{rs} sînt determinanți de relațiile

$$\sum_{s=1}^{n} g^{rs}g_{st} = \delta_t^r$$

($\delta_t^r = 1$) pentru $r = t$ și $\delta_t^r = 0$ pentru $r \neq t$). Deci matricea $\| g^{rs} \|$ a coeficienților operatorului $L_{\mathfrak{Q}}$ este inversa matricei $\| g_{st} \|$ a formei pătratice. Avem

$$L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}^{\lambda+1} = 4(\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)\mathfrak{Q}^\lambda$$

Această relație se verifică ușor printr-un calcul direct. Aplicînd această relație de k ori obținem:

$$L_{\mathfrak{Q}}^k\mathfrak{Q}^{\lambda+k} = 4^k(\lambda + 1) \ldots (\lambda + k)\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{n}{2} + k - 1\right)\mathfrak{Q}^\lambda,$$

deci

$$\mathfrak{Q}^\lambda = \frac{1}{4^k(\lambda + 1) \ldots (\lambda + k)\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{n}{2} + k - 1\right)} L_{\mathfrak{Q}}^k \mathfrak{Q}^{\lambda+k} \tag{6}$$

Prin urmare,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} \mathfrak{Q}^{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{4^k k!(\lambda+1)\dots(\lambda+k)(\lambda+n/2)\dots(\lambda+n/2+k-1)}\Bigg|_{\lambda=-n/2-k} \times$$

$$\times \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} L_{\mathfrak{Q}}^{k}\mathfrak{Q}^{\lambda},$$

de unde, aplicînd formula (4) găsim:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} \mathfrak{Q}^{\lambda} = \frac{\exp(-\pi n i/4)\pi^{n/2}}{4^k k!\,\Gamma(n/2+k)\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}} L_{\mathfrak{Q}}^{k}\delta(x). \tag{7}$$

Formula (7) a fost obținută în ipoteza că forma pătratică aparține „axei imaginare". Trebuie acum să prelungim expresia obținută la „semiplanul superior" al tuturor formelor pătratice $\mathfrak{Q} = P_1 + \mathrm{i}P_2$ cu parte imaginară pozitiv definită. Dar prelungirea analitică a operatorului $L_{\mathfrak{Q}}$ este cunoscută, pentru că coeficienții săi depind analitic de coeficienții formei pătratice $\mathfrak{Q}$. Rămîne de lămurit cum se prelungește la întreg „semiplanul superior" funcția $\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}$. Prin urmare problema va fi complet rezolvată dacă vom ști să definim $\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}$, ca o funcție analitică uniformă în întreg „semiplanul superior" al matricilor pătratice.

Pentru aceasta reprezentăm din nou forma $\mathfrak{Q}$ astfel:

$$\mathfrak{Q} = P_1 + \mathrm{i}P_2,$$

în care P_1 și P_2 sînt forme pătratice cu coeficienți reali, iar forma P_2 este pozitiv definită.

Există o transformare liniară nedegenerată

$$x_r = \sum_{s=1}^{n} b_{rs}y_s$$

cu coeficienți reali, care reduc formele P_1 și P_2 la

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

$$P_2 = y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Coeficienții reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ai formei P_1 nu depind de alegerea unei astfel de transformări și sînt deci invarianți ai formei $\mathfrak{Q}$. Avem:

$$|g| = |b|^2(\lambda_1 + \mathrm{i})\dots(\lambda_n + \mathrm{i}),$$

unde $|b|$ este determinantul matricii $\|b_{ij}\|$. Deci

$$(-\mathrm{i})^n|g| = b^2(1-\lambda_1\mathrm{i})\dots(1-\lambda_n\mathrm{i}).$$

Să punem atunci

$$\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|} = \sqrt{|b|^2}(1-\lambda_1\mathrm{i})^{\frac{1}{2}}\dots(1-\lambda_n\mathrm{i})^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

unde valorile rădăcinii pătratice sînt definite de formula

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg z}, \qquad -\pi < \arg z < \pi.$$

Funcția definită de formula (8) va fi funcția analitică uniformă căutată în „semiplanul superior" al formelor pătratice complexe cu parte imaginară pozitiv definită.

Astfel, *dacă*

$$\mathfrak{Q} = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$$

este o formă pătratică arbitrară, cu partea imaginară pozitiv definită, atunci distribuția $\mathfrak{Q}^{\lambda}$ *este o funcție analitică de* λ *peste tot cu excepția punctelor* $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \dots, -\frac{n}{2}-k, \dots$ *în care această funcție are poli simpli. Pentru acestea avem:*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \mathfrak{Q}^{\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x), \tag{9}$$

unde $|g|$ *este discriminantul formei pătratice* $\mathfrak{Q}$, *iar funcția* $\sqrt{(-\mathrm{i})^n|g|}$ *este definită de formula* (8).

În mod asemănător se poate considera „semiplanul inferior" al formelor pătratice cu formă imaginară negativ definită.

Dacă forma

$$\mathfrak{Q} = P_1 - iP_2 = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s$$

aparține „semiplanului inferior", atunci distribuția $\mathfrak{Q}$ este de asemenea o funcție analitică regulată de λ peste tot cu excepția punctelor

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots$$

în care are poli simpli. Pentru aceștia avem:

$$(9') \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \mathfrak{Q}^{\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) \sqrt{i^n |g|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x),$$

unde iarăși $|g|$ este discriminantul formei $\mathfrak{Q}$ și $\sqrt{i^n |g|}$ este dat de o formulă analoagă formulei (8):

$$\sqrt{i^n |g|} = \sqrt{|b|^2} (1 + \lambda_1 i)^{1/2} \ldots (1 + \lambda_r i)^{1/2}.$$

2.4. **Distribuțiile** $(P + i0)^{\lambda}$ **și** $(P - i0)^{\lambda}$. Folosind rezultatele de la § 2.3 putem cerceta acum orice formă pătratică reală la puterea λ. Fie

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s$$

o matrice nedegenerată, cu *coeficienți reali*. Atunci în analogie cu distribuțiile $(x + i0)^{\lambda}$ și $(x - i0)^{\lambda}$, considerate în cap. I, § 3, vom defin distribuțiile $(P + i0)^{\lambda}$ și $(P - i0)^{\lambda}$. Pentru aceasta considerăm forma pătratică

$$\mathfrak{Q} = P + iP',$$

unde P' este o formă pozitiv definită (cu coeficienți reali). Nu este greu de arătat că atunci cînd coeficienții formei pătratice P' tind către zero, distribuția $(P + iP')^{\lambda}$ tinde către o limită perfect determinată. Această limită o notăm $(P \pm i0)^{\lambda}$.

Într-adevăr, această afirmație este evidentă pentru $\operatorname{Re}\lambda > 0$, căci atunci se poate face trecerea la limită sub integrală $\int \mathfrak{Q}^{\lambda} \varphi \, dx$.

Pe de altă parte, în virtutea relației (6) de la § 2.3,

$$\mathfrak{Q}^{\lambda} = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)} L_{\mathfrak{Q}}^{k} \mathfrak{P}^{\lambda+k},$$

care rămîne valabilă în toate punctele regulate ale lui $\mathfrak{Q}^{\lambda}$*.

Analog, definim distribuția $(P - i0)^{\lambda}$ ca limita distribuției $(P - iP')$, unde P' este o formă pozitiv definită, atunci cînd coeficienții lui P' tind către zero.

Din definiția distribuțiilor $(P + i0)^{\lambda}$ și $(P - i0)^{\lambda}$ rezultă că sînt funcții analitice de λ peste tot, exceptînd punctele

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots$$

Nu este de asemenea greu de arătat, folosind relația (6) de la § 2.3 că în aceste puncte funcțiile au poli simpli și că

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P + i0)^{\lambda} = \lim_{P' \to 0} \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P + iP')^{\lambda},$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P - i0)^{\lambda} = \lim_{P' \to 0} \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P - iP')^{\lambda}.$$

Pentru a explicita aceste reziduuri, este deci suficient de a găsi valorile limită ale funcțiilor $\sqrt{(-i)^n |g|}$ și $\sqrt{i^n |g|}$, g fiind discriminantul formei pătratice corespunzătoare complexe, $P + iP'$, atunci cînd P' tinde către zero.

Fără a micșora generalitatea se poate presupune că forma P' se poate scrie

$$P' = \varepsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \quad \varepsilon > 0.$$

Atunci $\sqrt{(-i)^n |g|}$ se poate reprezenta sub forma

$$\sqrt{(-i)^n |g|} = (\varepsilon - i\lambda)^{\frac{1}{2}} \ldots (\varepsilon - i\lambda_n)^{\frac{1}{2}},$$

* Nu ne vom opri asupra cazului λ întreg negativ, neaparținînd seriei de puncte singulare ale lui $\mathfrak{Q}^{\lambda}$. Remarcăm fără a demonstra acest lucru, că în aceste puncte $(P + i0)^{\lambda}$ nu are singularități.

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale matricii formei P. Să presupunem că forma P are în reprezentarea sa canonică p pătrate pozitive și q pătrate negative.
Obținem atunci pentru $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{(-\mathrm{i})^n |g|} = \sqrt{|\lambda_1 \ldots \lambda_n|}\, (-\mathrm{i})^{\frac{p}{2}} \mathrm{i}^{\frac{q}{2}},$$

adică

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{(-\mathrm{i})^n |g|} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}(p-q)} \sqrt{|\Delta|},$$

unde Δ este discriminantul formei pătratice reale P. Aplicînd acum formula (9) de la § 2.3 pentru $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} \mathfrak{Z}$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P + \mathrm{i}0)^\lambda =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-qi\frac{\pi}{2}}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x),$$

Analog,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P - \mathrm{i}0)^\lambda = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x). \tag{1'}$$

Astfel, *reziduurile funcțiilor* $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$ *și* $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$ *în punctele* $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k$, *sînt distribuții avînd fiecare suportul redus la vîrful conului* $P = 0$.

Distribuțiile $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$ și $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$ se exprimă astfel cu ajutorul distribuțiilor P_+^λ și P_-^λ definite în § 2.2:

$$(P + \mathrm{i}0)^\lambda = P_+^\lambda + \mathrm{e}^{\pi\lambda \mathrm{i}} P_-^\lambda, \tag{2}$$

$$(P - \mathrm{i}0)^\lambda = P_+^\lambda + \mathrm{e}^{\pi\lambda \mathrm{i}} P_-^\lambda, \tag{2'}$$

Într-adevăr, pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, funcționalelor (P_+^λ, φ) și (P_-^λ, φ) le corespund funcțiile

$$P_+^\lambda = \begin{cases} P^\lambda, & \text{pentru } P \geqslant 0, \\ 0, & \text{pentru } P \leqslant 0; \end{cases}$$

$$P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{pentru } P \geqslant 0, \\ (-P)^\lambda, & \text{pentru } P \leqslant 0. \end{cases}$$

În acest căz, relațiile (2) și (2') rezultă direct din definiția distribuțiilor $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$ și $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$. Dar atunci, din cauza unicității prelungirii analitice, formulele (2) și (2') rămîn valabile și pentru celelalte valori ale lui λ.

Să remarcăm în trecere, că din relațiile (2) și (2') rezultă că pentru $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ distribuțiile $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$, $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$ și P^λ coincid.

Să stabilim acum, bazîndu-se pe formulele (2) și (2') legături între reziduurile lui P_+^λ și P_-^λ pentru $\lambda = -\frac{n}{2} - k (k = 0, 1, \ldots)$.

Dezvoltările Laurent ale acestor funcții în vecinătatea punctelor $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ sînt de forma

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \ldots,$$

$$P_-^\lambda = \frac{c_{-2}'^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}'^{(k)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \ldots$$

În conformitate cu (2) și (2')

$$P_+^\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\lambda \mathrm{i}}(P + \mathrm{i}0)^\lambda - \mathrm{e}^{\pi\lambda \mathrm{i}}(P - \mathrm{i}0)^\lambda}{-2\mathrm{i}\sin\pi\lambda},$$

$$P_-^\lambda = \frac{(P + \mathrm{i}0)^\lambda - (P - \mathrm{i}0)^\lambda}{2\mathrm{i}\sin\pi\lambda}.$$

Rezultă de aici, utilizînd expresiile (1) și (1') pentru reziduurile lui $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$ și $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$, că *dacă dimensiunea spațiului* n *este impară*,

sau dacă n este par și p și q de asemenea pare, atunci $c'^{(k)}_{-2} = c^{(k)}_{-2} = 0$; *dacă p și q sînt ambele impare, atunci*

$$c^{(k)}_{-2} = (-1)^{\frac{n}{2}+k+1} c'^{(k)}_{-2} = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) \sqrt{|\Delta|}} L_P^k \delta(x),$$

unde

$$L_p = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}.$$

Aceste rezultate fuseseră deja obținute în § 2.2 prin altă metodă.

Așadar, din relația (2) avem:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k} (P+\mathrm{i}0)^\lambda = \operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k} P_+^\lambda + \operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-k} e^{\pi\lambda \mathrm{i}} P_-^\lambda$$

de unde

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-(n/2)-2} (P+\mathrm{i}0)^\lambda = c^{(k)}_{-1} + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\mathrm{i}} c'^{(k)}_{-1} + \pi \mathrm{i} e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\mathrm{i}} c'^{(k)}_{-2}(k).$$

Ținînd seama de expresiile lui $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} (P+\mathrm{i}0)^\lambda$ și $c'^{(k)}_{-2}$, obținem: *dacă dimensiunea n a spațiului este un număr impar, sau dacă n este par, iar p, q de asemenea pare, atunci*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_+^\lambda + \exp\left(-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\mathrm{i}\right) \cdot \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_-^\lambda =$$

(4)

$$= \frac{\pi^{n/2} \exp(-\mathrm{i}\pi q/2)}{4^k k!\, \Gamma(n/2+k) \sqrt{|\Delta|}} L_P^k \delta(x);$$

dacă p și q sînt impare, atunci

(5) $$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_+^\lambda + \exp\left(-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\mathrm{i}\right) \cdot \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2-k} P_+^\lambda = 0.$$

Să mai remarcăm că *dacă n este impar, sau dacă n este par și $k < n/2$, atunci, conform formulei* (2),

(6) $$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda + (-1)^k \operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_-^\lambda = \operatorname*{Res}_{\lambda=-k} (P+\mathrm{i}0)^\lambda = 0.$$

Vom presupune de acum încolo că forma pătratică P este adusă la forma canonică:

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

În § 2.2 au fost găsite formule explicite pentru reziduurile funcțiilor P_+^λ și P_-^λ cu ajutorul distribuțiilor $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$ și $\delta(x)$. Introducînd aceste expresii în (4), (5), (6) găsim:

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1} \delta(x),$$

unde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2},$$

iar $c_{p,q,k} = 0$ dacă dimensiunea n a spațiului este un număr impar, de asemenea dacă n este par și $k < \frac{n}{2} - 1$; în celelalte cazuri $c_{p,q,k}$ se pot obține ușor pe baza formulelor din § 2.2.

Astfel, *dacă dimensiunea n a spațiului este impară sau dacă n este par și $k < \frac{n}{2} - 1$, $\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P)$. Dacă n este par și $k > \frac{n}{2} - 1$, atunci diferența $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P)$ este o distribuție concentrată în vîrful conului $P = 0$.*

Conform teoriei generale, care va fi considerată în § 4, o definiție mai naturală a distribuțiilor omogene concentrate pe suprafața $P = 0$ este următoarea (v. în continuare, pag. 401)

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \operatorname*{Res}_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda,$$

și analog

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \operatorname*{Res}_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda.$$

În cazul dimensiunii impare a spațiului, sau cazul dimensiunii n pare, $k < \frac{n}{2} - 1$, avem:

$$\delta^{(k)}(P_+) = \delta_1^{(k)}(P), \quad \delta^{(k)}(P_-) = \delta_1^{(k)}(-P);$$

În cazul dimensiunii pare și $k > \frac{n}{2} - 1$, diferențele

$$\delta^{(k)}(P_+) - \delta_1^{(k)}(P), \quad \text{și} \quad \delta^{(k)}(P_-) - \delta_1^{(k)}(-P)$$

sînt distribuții concentrate în vîrful conului $P = 0$.

Rezultă din relațiile (4) — (6) că *dacă p și q sînt simultan pare și* $k > \frac{n}{2} - 1$, *atunci*

$$(-1)^k \delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}} \left(k+1-\frac{n}{2}\right)!} L^{k+1-\frac{n}{2}} \delta(x),$$

iar în toate celelalte cazuri

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k \delta^{(k)}(P_+).$$

2.5. **Soluții fundamentale ale ecuațiilor diferențiale liniare.** Vom utiliza acum rezultatele obținute în § 2.3 și § 2.4 pentru a studia soluțiile fundamentale ale ecuației

$$L^k u = f(x), \tag{1}$$

unde L este un operator liniar omogen de forma:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Reamintim că se numește soluție fundamentală a ecuației (1), o distribuție K ce verifică

$$L^k K = \delta(x). \tag{2}$$

În particular, orice ecuație liniară diferențială de ordinul al doilea cu coeficienți constanți, conținînd doar derivate de ordinul 2 se poate reduce la ecuația (1), pentru $k = 1$. Această ecuație se numește de obicei ultrahiperbolică. Pentru p sau q nuli, ea se reduce la ecuația lui Laplace, iar pentru p sau q egali cu 1, la ecuația undelor.

Este natural de căutat soluția ecuației (2) sub forma unei distribuții omogene, căci atît operatorul L cît și distribuția $\delta(x)$ ce figurează în membrul drept sînt omogene (sau a unei distribuții asociate, v. definiția din § 1). Cum după $2k$-derivări succesive ale distribuției K se obține distribuția $\delta(x)$, avînd gradul de omogenitate $-n$, cu $n = p + q$ dimensiunea spațiului, gradul de omogenitate al lui K trebuie să fie $-n + 2k$.

Pe de altă parte, ecuația (2) este invariantă la transformările liniare ce nu schimbă forma pătratică

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Vom construi soluția acestei ecuații sub forma

$$K = f(P).$$

În § 2.4 au fost considerate distribuțiile omogene de P: $(P + i0)^\lambda$ și $(P - i0)^\lambda$. Pentru $\lambda = -\frac{n}{2} + k$ aceste distribuții au gradul de omogenitate cerut, $-n + 2k$.

Vom arăta acum că, *exceptînd cazul în care dimensiunea spațiului este un număr par, iar* $k \geqslant \frac{n}{2}$, *fiecare dintre distribuțiile* $(P+i0)^{-(n/2)+k}$ și $(P - i0)^{-(n/2)+k}$ *este, cu aproximația unui factor constant, o soluție fundamentală a ecuației* $L^k u = f(x)$.

Folosim relațiile, stabilite în § 2.3 și § 2.4:

$$L^k (P + i0)^{\lambda+k} =$$

$$= 4^k (\lambda + 1) \ldots (\lambda + k) \left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{n}{2} + k - 1\right) (P + i0)^\lambda. \tag{3}$$

De aici, pentru $\lambda = -\frac{n}{2}$, obținem:

$$L^k (P + i0)^{-(n/2)+k} =$$

$$= 4^k \left(1 - \frac{n}{2}\right) \ldots \left(k - \frac{n}{2}\right) (k-1)! \operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} (P + i0)^\lambda. \tag{4}$$

Se vede deci că, *dacă dimensiunea n a spațiului este un număr par și* $k \geqslant \frac{n}{2}$, *atunci membrul drept al egalității* (4) *se anulează și obținem*

$$L^k (P + i0)^{-(n/2)+k} = 0,$$

adică *distribuția* $(P + i0)^{-(n/2)+k}$ *este o soluție a ecuației omogene* $L^k u = 0$.

În toate celelalte cazuri, introducînd în (4) expresia lui $\operatorname{Res}_{\lambda=-n/2}(P+\mathrm{i}0)^{\lambda}$, obţinem:

$$L^k(P+\mathrm{i}0)^{-\frac{n}{2}+k}=4^k\left(1-\frac{n}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{n}{2}\right)(k-1)!\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x).$$

Prin urmare, distribuţia

$$K_1=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}(P+\mathrm{i}0)^{-\frac{n}{2}+k}$$

este o soluţie fundamentală a ecuaţiei $L^ku=f(x)$.

Astfel, *cu excepţia cazului cînd dimensiunea n a spaţiului este un număr par şi $k\geqslant\frac{n}{2}$, distribuţia*

$$K_1=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}(P+\mathrm{i}0)^{-\frac{n}{2}+k} \tag{5}$$

şi analog, distribuţia

$$K_2=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}(P-\mathrm{i}0)^{-\frac{n}{2}+k} \tag{5'}$$

sînt soluţii fundamentale ale ecuaţiei $L^ku=f(x)$. Dacă n este par şi $k\geqslant\frac{n}{2}$, atunci distribuţia $(P+\mathrm{i}0)^{-n/2+k}=(P-\mathrm{i}0)^{-n/2+k}$ este soluţia ecuaţiei omogene $L^ku=0$.

Să remarcăm că soluţiile fundamentale K_1 şi K_2 sînt complex conjugate.

Formulele (5) şi (5') dau formele cele mai comode pentru soluţiile fundamentale ale ecuaţiei $L^ku=f(x)$. Am fi putut căuta soluţii fundamentale reale, combinînd părţile reale şi imaginare ale distribuţiilor K_1 şi K_2. Dar, după cum este paritatea sau imparitatea lui n precum şi după faptul că p şi q sînt pari sau impari, formulele soluţiilor fundamentale reale ale ecuaţiei $L^ku=f(x)$ sînt esenţial diferite.

Formulele ce dau soluţiile fundamentale K_1 şi K_2 ale ecuaţiei $L^ku=f(x)$ se pot transforma exprimînd aceste distribuţii direct, cu ajutorul distribuţiilor P_+^{λ} şi P_-^{λ}.

Vom utiliza pentru aceasta formulele de la § 2.4, ce exprimă pe $(P+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ şi $(P-\mathrm{i}0)^{\lambda}$ cu ajutorul distribuţiilor P_+^{λ} şi P_-^{λ}. Dacă dimensiunea n a spaţiului este impară, atunci P_+ şi P_- sînt regulate * pentru $\lambda=-\frac{n}{2}+k$ şi obţinem:

$$K_1=\overline{K}_2=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}\left(P_+^{-\frac{n}{2}+k}+e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i}P_-^{-\frac{n}{2}+k}\right). \tag{6}$$

Dacă n este par şi $k<\frac{n}{2}$, atunci P_+^{λ} şi P_-^{λ} au în punctul $\lambda=-\frac{n}{2}+k$ poli simpli avînd reziduurile egale cu

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2+k}P_+^{\lambda}=(-1)^{n/2-k-1}\operatorname*{Res}_{\lambda=n/2+k}P_-^{\lambda}=\frac{(-1)^{n/2-k-1}}{(n/2-k-1)!}\delta^{(n/2-k-1)}(P_+).$$

Notînd cu $P_+^{-n/2+k}$ şi $P_-^{-n/2+k}$ termenii liberi ai dezvoltării Laurent a funcţiilor P_+^{λ} şi P_-^{λ} în vecinătatea punctului $\lambda=-\frac{n}{2}+k$, obţinem:

$$K_1=\overline{K}_2=(-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}\left[P_+^{-\frac{n}{2}+k}+(-1)^{-\frac{n}{2}+k}P_-^{-\frac{n}{2}+k}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k}\pi i}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!}\delta^{\left(-\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+\right]. \tag{7}$$

* Ca funcţii de variabila λ. (Nota trad.).

Rezultă în particular, din formulele (6) și (7), că distribuțiile K_1 și K_2 sînt liniar independente. Distribuția $K_1 - K_2$ este soluția ecuației omogene $L^k u = 0$.

Să considerăm, în fine, cazul în care dimensiunea spațiului n este un număr par și $k \geqslant \frac{n}{2}$. Dezvoltînd funcția $(P + i0)^{\lambda+k}$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2}$, avem

$$(P + i0)^{\lambda+k} =$$

$$= (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} + \left(\lambda + \frac{n}{2}\right)(P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P + i0) + \ldots$$

Introducînd această dezvoltare în egalitatea (3) și identificînd apoi coeficienții lui $\lambda + \frac{n}{2}$ în ambii membri ai egalității, obținem:

$$L^k\left[(P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P + i0)\right] =$$

$$= 4^k(-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2} - 1\right)! \left(k - \frac{n}{2}\right)!(k-1)! \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} (P + i0)^{\lambda}.$$

Ținînd seama de expresia lui $\operatorname*{Res}_{\lambda=-n/2} (P + i0)^{\lambda}$ vedem că *dacă spațiul este de dimensiunea pară n, atunci soluția fundamentală a ecuației $L^k u = f(x)$ pentru $k \geqslant \frac{n}{2}$ este distribuția asociată*

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k - \frac{n}{2}\right)! (k-1)!} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P + i0).$$

Analog, *o altă soluție fundamentală a ecuației $L^k u = f(x)$ este în acest caz distribuția*

$$K_2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k - \frac{n}{2}\right)! (k-1)!} (P - i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P - i0).$$

Să remarcăm că formulele soluțiilor fundamentale ale ecuației $L^k u = f(x)$ își păstrează sensul și dacă L este un operator diferențial liniar omogen de ordinul al doilea arbitrar,

$$L = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}.$$

În acest caz drept P trebuie considerată forma pătratică

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s;$$

unde $\sum_{r=1}^{n} g_{rs} g^{rt} = \delta_s^t$ $(r, t = 1, \ldots, n)$. În expresia coeficientului lui $(P + i0)^{-n/2+k}$ și $(P - i0)^{-n/2+k}$ trebuie adăugat factorul $\sqrt{|\Delta|}$, Δ fiind discriminantul formei pătratice P.

De exemplu, soluția fundamentală a ecuației

$$\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u = f(x_1, x_2, x_3)$$

este distribuția

$$K_1 = \frac{1}{4\pi i}(2x_1x_3 + x_2^2 + i0)^{-1/2}$$

și

$$K_2 = \overline{K_1}.$$

2.6. Transformatele Fourier ale distribuțiilor $(P + i0)^{\lambda}$ și $(P - i0)^{\lambda}$. Pentru a găsi transformatele Fourier ale distribuțiilor $(P + i0)^{\lambda}$ și $(P - i0)^{\lambda}$ aplicăm metoda prelungirii analitice în raport cu coeficienții formei pătratice, dezvoltată în § 2.3.

Fie

$$(1) \qquad \mathfrak{Q} = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2,$$

o formă pătratică, cu coeficienți complecși, pentru care $\operatorname{Im} \mathfrak{Q}$ este o formă pozitiv definită, adică $\operatorname{Im} \alpha_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Distribuția $\mathfrak{Q}^{\lambda}$ și deci și transformata sa Fourier $\widetilde{\mathfrak{Q}^{\lambda}}$ este o funcție analitică de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ în domeniul $\operatorname{Im} \alpha_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Pentru a găsi pe $\widetilde{\mathfrak{P}}^{\lambda}$ este deci suficient de a considera cazul în care toţi coeficienţii sînt pur imaginari: $\alpha_s = \mathrm{i}b_s$ cu $b_s > 0$, $(s = 1, \ldots, n)$. Dar în acest caz

$$\widetilde{\mathfrak{P}}^{\lambda} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\int (b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2)^{\lambda} \mathrm{e}^{i(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)}\,\mathrm{d}x.$$

După o schimbare de variabilă corespunzătoare obţinem:

$$\widetilde{\mathfrak{P}}^{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\lambda i}}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}}\int r^{2\lambda}\mathrm{e}^{i\left(x_1\frac{s_1}{\sqrt{b_1}}+\ldots+x_n\frac{s_n}{\sqrt{b_n}}\right)}\mathrm{d}x,$$

unde $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Transformata Fourier a distribuţiei r^{λ} a fost calculată în cap. II, § 3.3. Utilizînd formula găsită acolo, avem

$$\widetilde{\mathfrak{P}}^{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\,2^{2\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}\,\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{s_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{b_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}},$$

sau

$$(2)\qquad \widetilde{\mathfrak{P}}^{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi n i}{4}}\,2^{2\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{-\mathrm{i}\alpha_1}\ldots\sqrt{-\mathrm{i}\alpha_n}\,\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{\alpha_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}}.$$

Din unicitatea prelungirii analitice, formula (2) rămîne valabilă pentru orice formă pătratică de tipul (1) cu parte imaginară pozitiv definită; valorile rădăcinii pătratice sînt date de $\sqrt{z} = |z|^{1/2}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\arg z\right)$. Să remarcăm că forma $\frac{s_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{\alpha_n}$ are partea imaginară *negativ definită*.

Fie acum

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$

$$Q = s_1^2 + \ldots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \ldots - s_{p+q}^2.$$

Efectuînd trecerea la limită în formula (2) obţinem pentru

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 1,\ \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_{p+q} = -1$$

$$(3)\qquad F[(P \mp \mathrm{i}0)^{\lambda}] = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}qi}\,2^{2\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}(Q-\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$$

şi analog

$$(3')\qquad F[(P-\mathrm{i}0)^{\lambda}] = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\,2^{2\lambda+n}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}(Q+\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}.$$

Aplicînd formula (14) de la § 2.3 obţinem, după calcule elementare,

$$\widetilde{P}_{\mp}^{\lambda} = 2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times$$

$$(4)\qquad \times\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i}(Q-\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \mathrm{e}^{\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i}(Q+\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right],$$

$$\widetilde{P}^{\lambda} = -\,2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times$$

$$(4')\qquad \times\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\pi q i}{2}}(Q-\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi q i}{2}}(Q+\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right].$$

Să remarcăm că formulele transformatelor Fourier obţinute aici rămîn valabile şi în cazul în care P este o formă pătratică nedegenerată reală oarecare,

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}x_{\alpha}x_{\beta}.$$

În acest caz, drept Q trebuie considerată forma pătratică adjunctă

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$$

unde $\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma (\alpha, \gamma = 1, \ldots, n)$. În plus în toate formulele trebuie introdus în membrul al doilea factorul suplimentar $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, Δ fiind discriminantul formei pătratice P.

2.7. **Distribuții legate de funcțiile Bessel.** Să considerăm clasa distribuțiilor de forma $\mathfrak{Q}^\lambda f(\mathfrak{Q}, \lambda)$, unde $f(z, \lambda)$ este o funcție întreagă de z și λ, iar $\mathfrak{Q}$ o formă pătratică complexă cu parte imaginară pozitiv definită. Aceste distribuții sînt definite pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, prin

$$(1) \qquad (\mathfrak{Q}^\lambda f(\mathfrak{Q}, \lambda), \varphi(x)) = \int \mathfrak{Q}^\lambda f(\mathfrak{Q}, \lambda)\, \varphi(x)\, dx.$$

Este evident că pentru $Re\lambda > -1$, $\mathfrak{Q}f(\mathfrak{Q}, \lambda)$ este o funcție analitică de λ. Cu ajutorul prelungirii analitice definim distribuția $\mathfrak{Q}^\lambda f(\mathfrak{Q}, \lambda)$ și pentru alte valori ale lui λ. Analog se definesc și distribuțiile $\mathfrak{Q}^\lambda \ln^m \mathfrak{Q} f\ (\mathfrak{Q}, \lambda)$.

Nu este greu de arătat (de pildă plecînd de la dezvoltarea funcției $f(z, \lambda)$ în serie de puteri după variabila z) că pentru orice formă pătratică pozitivă $\mathfrak{Q}$ există limita

$$(2) \qquad (P + i0)^\lambda f(P + i0, \lambda) = \lim_{P_1 \to 0} (P + iP_1)^\lambda f(P + iP_1, \lambda),$$

unde P_1 este o formă pătratică pozitiv definită.

Cu totul analog se definește pentru orice formă pătratică reală P, distribuția

$$(P - i0)^\lambda f(P - i0, \lambda).$$

Este clar că dacă forma P este pozitiv definită, atunci

$$(P + i0)^\lambda f(P + i0, \lambda) = (P - i0)^\lambda f(P - i0, \lambda) = P^\lambda f(P, \lambda).$$

În plus, cum pentru toate valorile întregi pozitive n are loc egalitatea

$$(P + i0)^n = (P - i0)^n = P^n,$$

avem

$$f(P + i0, \lambda) = f(P - i0, \lambda) = f(P, \lambda).$$

Să exprimăm acum distribuțiile $(P+i0)^\lambda f(P, \lambda)$ și $(P-i0)^\lambda f(P, \lambda)$ cu ajutorul lui P_+ și P_-. Pentru aceasta remarcăm că, după cum s-a arătat la § 2.4,

$$(P + i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} P_-^\lambda,$$
$$(P - i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} P_-^\lambda.$$

Cum

$$P_+^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) \text{ și } P_-^\lambda f(P, \lambda) = P_-^\lambda f(P_-, \lambda),$$

rezultă că

$$(3) \qquad (P + i0)^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) + e^{i\lambda\pi} P_-^\lambda f(P_-, \lambda)$$

și

$$(4) \qquad (P - i0)^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) + e^{-i\lambda\pi} P_-^\lambda f(P_-, \lambda).$$

Clasa de distribuții pe care am definit-o este suficient de largă Ei îi aparțin, în particular, distribuții ca $P^{\lambda/2} J_\lambda(P^{1/2})$ și $P^{-\lambda/2} J_\lambda(P^{1/2})$ unde $J_\lambda(z)$ este funcția Bessel de ordin λ. Este ușor de verificat acest lucru, considerînd dezvoltarea

$$(5) \qquad J_\lambda(z) = \left(\frac{z^\lambda}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\ \Gamma(\lambda + m - 1)}.$$

Alături de funcțiile $J_\lambda(z)$ vom considera de asemenea funcțiile $N_\lambda(z)$, $H_\lambda^{(1)}(z)$, $H_\lambda^{(2)}(z)$, $I_\lambda(z)$, $K_\lambda(z)$, care, pentru valori neîntegri ale lui λ sînt definite de :

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{\sin \lambda\pi} [\cos \lambda\pi\, J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)],$$

$$H_\lambda^{(1)}(z) = J_\lambda(z) + iN_\lambda(z),$$

$$H_\lambda^{(2)}(z) = J_\lambda(z) - iN_\lambda(z),$$

$$I_\lambda(z) = e^{-\frac{\pi\lambda i}{2}} J_\lambda(iz),$$

$$K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2 \sin \lambda\pi} (I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)].$$

Pentru valorile întregi ale lui λ aceste funcții se definesc cu ajutorul unei treceri la limită în raport cu λ.

Dezvoltările funcțiilor $N_\lambda(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(1)}(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(2)}(z^{1/2})$, $I_\lambda(z^{1/2})$, $K_\lambda(z^{1/2})$ în serii de puteri se obțin ușor, pentru valorile lui λ neintregi, din dezvoltarea (5) a funcției $J_\lambda(z)$. Aceste funcții aparțin clasei de funcții considerate de noi, și, ca atare putem introduce distribuțiile $K_\lambda[(P+\mathrm{i}0)^{1/2}]$, $(P+\mathrm{i}0)^{-\lambda/2}$, $K_\lambda[(P+\mathrm{i}0)^{1/2}]$ ș.a.m.d.

2.8. **Transformatele Fourier ale distribuțiilor** $(c^2+P+\mathrm{i}0)^\lambda$ *și* $(c^2+P-\mathrm{i}0)^\lambda$. Am văzut în cap. II, § 2.6, că transformatele Fourier ale distribuțiilor $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$ se exprimă cu ajutorul funcțiilor Bessel. În acest punct, precum și în următoarele vom arăta că același lucru se întîmplă și cu transformatele Fourier ale distribuțiilor $(c^2+P)_+^\lambda$ și $(c^2+P)_-^\lambda$, care sînt analoagele n-dimensionale ale distribuțiilor $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$.

Să începem cu considerarea distribuției $(c^2+P)^\lambda$ pentru o formă pătratică pozitiv definită P. Transformata Fourier a distribuției $(c^2+P)^\lambda$ este dată pentru $Re\ \lambda<-n/2$ de integrala

$$F[(c^2+P)^\lambda]=\int (c^2+P)^\lambda\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,s)}\mathrm{d}x, \tag{1}$$

în care $(x,s)=x_1s_1+\ldots+x_ns_n$.

Să considerăm mai întîi cazul în care P are forma canonică $\sum_{k=1}^n x_k^2$. Este evident că în acest caz distribuția $F[(c^2+P)^\lambda]$ depinde doar de $|s|$ — lungimea vectorului s. De aceea fără a micșora generalitatea putem presupune că vectorul s este de forma $s=(|s|,0,\ldots,0)$, și prin urmare, integrala (1) este de forma

$$\int (c^2+|x|^2)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1|s|}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

unde $\mathrm{Re}\ \lambda<-n/2$.

Pentru a calcula integrala (2) trecem la coordonate polare. Integrînd în raport cu unghiurile $\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}$ și ținînd seama că $\Omega_{n-1}=\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, obținem că integrala (2) este egală cu

$$\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\pi (c^2+r^2)^\lambda\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}r|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,r^{n-1}\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r.$$

Dar, este cunoscut că

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}r|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_1=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{r|s|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|),$$

iar

$$\int_0^\infty r^{\frac{n}{2}}(c^2+r^2)^\lambda J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|)\,\mathrm{d}r=\left(\frac{2}{|s|}\right)^{\lambda+1}\frac{c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|).$$

De aceea integrala (2) are pentru $\mathrm{Re}\ \lambda<-n/2$ următoarea expresie

$$\int (c^2+|x|^2)^\lambda\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1|s|}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|). \tag{3}$$

Pentru celelalte valori ale lui λ este de asemenea valabilă formula (3) stabilită cu ajutorul prelungirii analitice în raport cu λ.

Pentru a obține formula transformatei Fourier a oricărei forme pătratice pozitiv definite, scriem egalitatea (3) sub forma

$$\sqrt{\Delta}\int (c^2+|x|^2)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,s)}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|). \tag{4}$$

(discriminantul Δ al formei pătratice $|x|^2=\sum_{k=1}^n x_k^2$ este egal cu 1). Printr-o transformare de coordonate ce duce forma $|x|^2$ în forma $P=\sum_{k,r=1}^n g_{kr}x_kx_r$, $\sqrt{\Delta}\,\mathrm{d}x$ rămîne invariantă, iar pătratul lungimii vectorului din spațiul dual capătă forma $\sum_{k,r=1}^n g^{kr}s_ks_r$ $\left(Q=\sum_{k,r=1}^n g^{kr}s_ks_r\right.$ — forma pătratică dual formei $P=\left.\sum_{k,r=1}^n g_{kr}s_ks_r\right)$. De aceea printr-o astfel de transformare de cooronate egalitatea (4) se transformă în

$$\sqrt{\Delta}\int (c^2+P)^\lambda\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,s)}\mathrm{d}x=\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n\,c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}(cQ^{1/2})}{Q^{1/2\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}.$$

Rezultatul obținut se poate formula în modul următor:

Fie P o formă pătratică pozitiv definită, Q forma sa duală. Atunci transformata Fourier a distribuției $(c^2 + P)^\lambda$ este egală cu

$$F[(c^2 + P)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}(cQ^{\frac{1}{2}})}{Q^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\lambda)}}, \tag{5}$$

Δ fiind discriminantul formei P.

Fie acum P o formă pătratică reală oarecare. În acest caz vom considera distribuțiile $(c^2 + P + i0)^\lambda$ și $(c^2 + P - i0)^\lambda$, definite de

$$(c^2 + P + i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} (c^2 + P + i\varepsilon P_1)^\lambda, \tag{6}$$

respectiv

$$(c^2 + P - i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} (c^2 + P - i\varepsilon P_1)^\lambda, \tag{7}$$

unde $\varepsilon > 0$, iar P_1 este o formă pătratică pozitiv definită. Existența limitelor (6) și (7) a fost demonstrată, pentru $c = 0$, în § 2.4, iar existența lor pentru $c \neq 0$ rezultă din absența punctelor singulare pe suprafața $c^2 + P = 0$.

Dacă forma pătratică $\mathfrak{Q}$ variază în „semiplanul superior", atunci forma sa duală Q variază în „semiplanul inferior". De aceeea, din unicitatea prelungirii analitice rezultă din formula (5), că

$$[(c^2 + P + i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q - i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q - i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\lambda)}}. \tag{8}$$

$\sqrt{\Delta}$ din formula (8) trebuie înțeles ca acea ramură a prelungirii analitice care ia valori pozitive pentru formele pătratice pozitive *. Să remarcăm că $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|} = e^{(iq\pi)/2}$, dacă reprezentarea canonică a formei P are q termeni negativi. Se demonstrează analog că

$$F[(c^2 + P - i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q + i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q + i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\lambda)}}. \tag{9}$$

*O prelungire analitică de aceeași natură a fost considerată în mod amănunțit în § 2.3 și nu vom repeta acum considerațiile corespunzătoare.

În acest caz are loc egalitatea $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}\, e^{-(q\pi i)/2}$ unde q este numărul termenilor negativi în reprezentarea canonică a formei P.

Să exprimăm acum distribuțiile $F[(c^2 + P + i0)^\lambda]$ și $F[(c^2 + P - i0)^\lambda]$ cu ajutorul distribuțiilor Q_+ și Q_-. Folosind dezvoltarea lui $K_\lambda(z)$ în serie de puteri și formula (4) din § 2.7, obținem după transformări simple

$$F[(c^2 + P + i0)^\lambda] =$$

$$= \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q\pi i}{2}\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}} \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{1/2})}{Q_+^{1/2(\lambda+\frac{n}{2})}} + \frac{\pi i}{2} \frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{1/2})}{Q_-^{1/2(\lambda+\frac{n}{2})}} \right] \tag{10}$$

și

$$F[(c^2 + P - i0)^\lambda] =$$

$$= \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{q\pi i}{2}\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}} \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{1/2})}{Q_+^{\frac{1}{2}(\lambda+\frac{n}{2})}} + \frac{\pi i}{2} \frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{1/2})}{Q_-^{1/2(\lambda+\frac{n}{2})}} \right]. \tag{11}$$

Formulele (10) și (11) se simplifică considerabil dacă forma P este definită: dacă P este pozitiv definită, atunci în parantezele drepte rămîn doar primii termeni, iar dacă P este negativ definită atunci rămîn ceilalți.

2.9. **Transformatele Fourier ale distribuțiilor** $(c^2 + P)_+^\lambda$ și $(c^2 + P)_-^\lambda$. Să considerăm acum distribuțiile $(c^2 + P)_+^\lambda$ și $(c^2 + P)_-^\lambda$; ele sînt combinații liniare ale distribuțiilor $(c^2 + P + i0)^\lambda$ și $(c^2 + P - i0)^\lambda$ și deci transformatele lor Fourier vor fi combinații liniare ale transformatelor Fourier ale distribuțiilor $(c^2 + P + i0)^\lambda$ și $(c^2 + P - i0)^\lambda$, și anume

$$F[(c^2 + P)_+^\lambda] =$$

$$= \frac{i}{2 \sin \lambda\pi} \{e^{-i\lambda\pi} F[(c^2 + P + i0)^\lambda] - e^{i\lambda\pi} F[(c^2 + P - i0)^\lambda]\} \tag{1}$$

și

$$F[(c^2 + P)^\lambda] =$$

$$= -\frac{i}{2 \sin \lambda\pi} \{F[(c^2 + P + i0)^\lambda] - F[(c^2 + P - i0)^\lambda]\}. \tag{2}$$

Introducînd în aceste formule în locul lui $F[(c^2 + P + i0)^\lambda]$ și $F[(c^2 + P - i0)^\lambda]$ expresiile (8) și (9) de la § 2.8, obținem:

$$\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = -\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \times \tag{3}$$

$$\times \left\{ e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi} \cdot \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[(cQ - i0)^{1/2}]}{(Q - i0)^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q + i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q + i0)^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right\}$$

și

$$\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \times \tag{4}$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[(c\,Q - i0)^{1/2}]}{(Q - i0)^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - e^{\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q + i0)]^{\frac{1}{2}}]}{(Q + i0)^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right\}$$

Se pot exprima distribuțiile $\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ și $\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ cu ajutorul distribuțiilor Q_+^λ și Q_-^λ. Pentru aceasta trebuie introduse în formulele (1) și (2) în locul lui $F[(c^2 + P + i0)^\lambda]$ și $F[(c^2 + P - i0)^\lambda]$ expresiile (10) și (11) de la § 2.8. Obținem astfel

$$\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \tag{5}$$

$$= \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\, \pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ -\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi \frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_+^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \frac{\pi}{2^{\lambda}\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi \frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \sin\frac{p\pi}{2} \frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{1/2})}{Q_-^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right] \right\}.$$

În această formulă cu p s-a notat numărul termenilor pozitivi în reprezentarea canonică a formei P, $p + q = n$.

Formula pentru $\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ se obține din formula ce exprimă pe $\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ înlocuind $\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi$ cu $-\sin q\,\frac{2}{\pi}$ și $\sin\frac{p\pi}{2}$ cu $-\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi$. Ea se scrie

$$\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\, \pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \sin\frac{q\pi}{2} \frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - \right.$$

$$- \frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi} \times \left[\sin\frac{q\pi}{2} \frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ^{1/2})}{Q_-^{1/2\left(\frac{n}{2}\right)}} + \right.$$

$$\left. \left. + \sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi \frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{1/2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right] \right\}.$$

Dacă facem $c = 0$ în formulele (3) și (4), atunci acestea se reduc la formulele (5) și (6) din § 2.6 pentru $\widetilde{P_+^\lambda}$ și $\widetilde{P_-^\lambda}$. Cazuri particulare ale acestor formule sînt cele stabilite în cap. II, § 2.6, pentru transformatele Fourier ale distribuțiilor $(1 - x^2)_+^\lambda$, $(1 + x^2)_+^\lambda$, $(x^2 - 1)_+^\lambda$.

2.10. **Transformatele Fourier ale distribuțiilor $\frac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ și $\frac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ pentru valori întregi ale lui λ. Transformarea Fourier a distribuției $\delta(c^2 + P)$ și a derivatelor sale.** Formulele date în § 2.9 pentru transformatele Fourier ale distribuțiilor $\frac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$

și $\frac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ cer o examinare mai amănunțită pentru valorile întregi ale lui λ. Aceasta este legat de faptul că distribuțiile

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[(c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} \text{ și } \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

au poli pentru valorile întregi ale lui λ.

Distribuția $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)}$ este definită de următoarea dezvoltare:

$$(1)\qquad \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}}{2\sin\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)\pi} \times$$

$$\left[\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-2\lambda-n+2m}(Q+\mathrm{i}0)^{-\lambda-\frac{n}{2}+m}}{m!\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+m+1\right)}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+\mathrm{i}0)^{m}}{m!\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+m+1\right)}\right].$$

Dar conform § 2.4 distribuția $(Q+\mathrm{i}0)^\lambda$ are în $\lambda=-\frac{n}{2}-h$ un pol de reziduu *

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(Q+\mathrm{i}0)^\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi q\mathrm{i}}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\sum_{r,s=1}^{n}g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}\right)^k\delta(x).$$

* Discriminantul formei Q este egal cu $\frac{1}{\Delta}$ unde Δ este discriminantul formei P.

De aceea distribuția $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ are pentru $\lambda=s$, $s>0$ un pol cu reziduu

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=s}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{(-1)^s\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi q\mathrm{i}}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\times$$

$$(2)\qquad \sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x),$$

unde s-a notat

$$L=\sum_{r,t=1}^{n}g^{rt}\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_t}$$

(pentru calculul reziduului am utilizat relația cunoscută $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$).

Să găsim acum partea regulată a distribuției $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ pentru $\lambda=s$. Aceasta este ușor dacă n este un întreg impar. În acest caz, partea regulată a distribuției $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ pentru $\lambda=s$ este suma a doi termeni. Primul dintre aceștia este dat de seria (1) pentru $\lambda=s$ unde prin $(Q+\mathrm{i}0)^{-s-n/2+m}$ pentru $m\leqslant s$ se înțelege valoarea părții regulate a distribuției $(Q+\mathrm{i}0)^\lambda$ pentru $\lambda=-s-\frac{n}{2}+m$. Al doilea termen este de forma $\sum_{m=0}^{s}\alpha_m\beta_m$, unde

$$\alpha_m=\operatorname*{Res}_{\lambda=-s-\frac{n}{2}+m}(Q+\mathrm{i}0)^\lambda,$$

$$\beta_m=\frac{(-1)^m}{2(m!)}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m-\frac{n}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}-m\right)}\right]_{\lambda=s}.$$

Vom nota această parte regulată cu $\frac{K_{n/2+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+s)}}$.

Situația este ceva mai complicată pentru valorile pare ale lui n*). În acest caz definim distribuția

$$\frac{K_{n/2+s}[(c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+s)}}$$

ca suma a doi termeni, dintre care unul va fi iarăși egal cu $\sum_{m=0}^{s} \alpha_m \beta_m$, iar al doilea este suma seriei

$$(-1)^{\frac{n}{2}+s}\left(\ln\frac{c(Q+\mathrm{i}0)}{2}+\gamma\right)\frac{I_{\frac{n}{2}+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+$$

$$(3)\quad +\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+s}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}+s}\frac{(-1)^m(m-1)!}{\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}(Q+\mathrm{i}0)^{-m}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{m+\frac{n}{2}+s}+h_m}{m!\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+\mathrm{i}0)^m,$$

unde γ este constanta lui Euler, iar $h_m=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r}$.

Ca mai sus, înțelegem aici prin $(Q+\mathrm{i}0)^{-m}$, $m\geqslant\frac{n}{2}$ partea regulată a distribuției $(Q+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ pentru $\lambda=-m$. Distribuția $\frac{K_{n/2+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+s)}}$ este egală cu partea regulată a distribuției $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ pentru $\lambda=s$.

Considerăm acum distribuția

$$(4)\qquad \frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$$

*) Dezvoltarea (1), ce definește distribuția $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ își pierde atunci sensul.

pentru valorile întregi negative λ, $\lambda=-s$. În acest caz ea este egală cu $\frac{K_{n/2-s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2-s)}}$, unde pentru n impar distribuția $\frac{K_{n/2-s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2-s)}}$ este definită de seria (1), iar pentru n par de seria (3).

Afirmații asemănătoare au loc și pentru distribuția $\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q-\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$ cu singura diferență că reziduul acestei funcții pentru $\lambda=s$ este egal cu

$$(5)\qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=s}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$

$$=\frac{(-1)^s\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\pi q\mathrm{i}}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\sum\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!(s-m)!}.$$

Putem trece acum la considerarea distribuțiilor $\frac{F[(c^2+P)_+^{\lambda}]}{\Gamma(\lambda+1)}$ și $\frac{F[(c^2+P)_-^{\lambda}]}{\Gamma(\lambda+1)}$ pentru valorile întregi ale lui λ. Dacă $\lambda=-s$, cu s întreg pozitiv, atunci membrul stîng al egalității (3) din § 2.9 se reduce la $\delta^{(s-1)}(c^2+P)$. De aceea rezultă din formula (3) de la § 2.9 că

$$F[\delta^{(s-1)}(c^2+P)]=(-1)^{s+1}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{|\Delta|}}2^{\frac{n}{2}-s}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}-s}\times$$

$$(6)\qquad \times\left[\mathrm{e}^{\frac{-\pi\mathrm{i}q}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}c(Q-\mathrm{i}0)^{1/2}}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}-\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}q}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}\right].$$

Are loc în particular formula

$$F[\delta(c^2+P)] = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{|\Delta|}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times\left[-\mathrm{e}^{-\frac{\pi q\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}+\mathrm{e}^{\frac{\pi q\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}\right]. \tag{7}$$

Să considerăm acum valori pozitive s. Are loc formula

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=\frac{c_1}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

unde cu c_1 s-a notat reziduul distribuției

$$\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q+\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$$

în punctul $\lambda = s$, iar termenii nescriși tind către zero pentru $\lambda \to s$. Analog:

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=\frac{c_2}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

unde c_2 este reziduul distribuției

$$\frac{K_{n/2+\lambda}[c(Q-\mathrm{i}0)^{1/2}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{1/2(n/2+\lambda)}}$$

în punctul $\lambda = s$.

Introducînd aceste dezvoltări în formulele (3) și (4) din § 2.9 și trecînd la limită pentru $\lambda \to s$ obținem:

$$\frac{F[(c^2+P)_-^s]}{\Gamma(s+1)}=\frac{\mathrm{i}\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left[\mathrm{e}^{-\frac{q\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-\mathrm{e}^{\frac{q\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right] \tag{8}$$

și

$$\frac{F[(c^2+P)_+^s]}{\Gamma(s+1)}=(-1)^{s+1}\mathrm{i}2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times\left[\mathrm{e}^{\frac{-q\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{e}^{\frac{q\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{K_{\frac{n}{s}+s}[c(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+\mathrm{i}0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\frac{(2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)}L^m\delta(x).\right. \tag{9}$$

Rezultă din formulele (8) și (9) că

$$\frac{F[(c^2+P)^s]}{\Gamma(s+1)}=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{1}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x). \tag{10}$$

§ 3. Distribuții omogene

3.1. **Introducere.** Am întîlnit deja diferite tipuri de distribuții omogene în cap. I, § 3–4, și de asemenea și în § 2 al acestui capitol. În acest paragraf vom considera distribuții omogene oarecare, cu grad de omogenitate arbitrar, în spațiul n-dimensional.

Să reamintim că distribuția $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ este omogenă de grad λ dacă, oricare ar fi $\alpha > 0$

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^\lambda f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

sau, ceea ce este echivalent dacă,

$$\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f, \varphi(x_1, \ldots, x^n)). \tag{2}$$

În particular, vom face să corespundă unei funcții omogene de grad λ cu $\mathrm{Re}\lambda > -n$, continuă pentru $x \neq 0$, distribuția:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

care este o distribuție omogenă de grad λ. Dacă $f(x)$ este o funcție omogenă uzuală de grad λ, cu $\mathrm{Re}\lambda < -n$, ea are în origine o singularitate neintegrabilă; nu este deci evident că ea admite o regularizată

care să fie o distribuție omogenă de grad λ. Astfel de funcții (uzuale) vor fi numite formal omogene.

Vom utiliza în continuare următoarea proprietate, caracteristică distribuțiilor omogene de grad λ:

— *Condiția necesară și suficientă pentru ca o distribuție f să fie omogenă de grad λ este ca ea să verifice ecuația lui Euler:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f. \tag{3}$$

Demonstrație. Să reamintim mai întîi că aplicînd (3) unei funcții test $\varphi(x)$ avem:

$$-\left(f, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_i\varphi)}{\partial x_i}\right) = \lambda(f, \varphi),$$

adică

$$-\left(f, \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = (\lambda + n)(f, \varphi). \tag{4}$$

Fie f o distribuție omogenă de grad λ:

$$\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Să derivăm această egalitate în raport cu α. După cum este ușor de văzut în membrul sting derivarea trece asupra funcției test și obținem:

$$-\left(f, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right) = (\lambda + n)\alpha^{\lambda+n-1}(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Rămîne de făcut $\alpha = 1$ pentru a găsi egalitatea (4).

Reciproc fie f o distribuție verificînd ecuația (4). Să considerăm fracția

$$\frac{(f, \varphi(x_1/\alpha, \ldots x_n/\alpha))}{\alpha^{\lambda+n}}$$

pentru $\alpha > 0$. Derivînd-o în raport cu α, obținem din condiția (4) că această derivată este egală cu zero. Aceasta înseamnă că

$$\frac{\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^{\lambda+n}} = \text{const} = \frac{(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n))}{1},$$

adică f este o distribuție omogenă de grad λ.

3.2. **Funcții omogene pozitive de mai multe variabile independente.** Să considerăm o funcție continuă omogenă de gradul întîi în $x_1, \ldots, x_n$ pozitivă în întreg spațiul, cu excepția originii; de exemplu $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ sau în general $P^{1/2m}(x_1, x_2, \ldots x_n)$, unde $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o formă pozitiv omogenă de grad $2m$. Să notăm această funcție cu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și să considerăm pentru $Re\lambda > -n$ distribuția

$$(f^\lambda(x), \varphi(x)) = \int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Aici $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este, ca de obicei, o funcție test (adică o funcție cu suport compact, indefinit derivabilă). Este ușor de arătat că pentru acei λ pentru care integrala converge, formula (1) definește o distribuție omogenă de grad λ, depinzînd analitic de λ. Să arătăm că *distribuția f^λ se prelungește analitic în întreg planul complex, cu excepția punctelor $\lambda = -n, \ldots, -n-k, \ldots$ în care f^λ poate avea poli simpli.*

Distribuția obținută este regularizata integralei $\int f^\lambda\varphi\,dx$ (v. cap. I, § 1.7) și cum această regularizată coincide pentru $\lambda > -n$ cu integrala în sens uzual, vom păstra și pentru regularizare notația $\int f^\lambda\varphi\,dx$.

Pentru demonstrarea afirmației alegem în spațiul cu n-dimensiuni un domeniu oarecare G cu frontieră regulară Γ, ce conține originea, și reprezentăm integrala (1), pentru $Re\lambda > -n$, sub forma:

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_G f^\lambda(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R\setminus G} f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_G f^\lambda(x)\,dx \tag{2}$$

($R\setminus G$ este complementara domeniului G). Să transformăm pe $\int f^\lambda(x)\,dx$. Cum $f^\lambda(x)$ este omogenă de grad λ,

$$\sum x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k} = \lambda f^\lambda(x)$$

și, prin urmare,

$$\int_G f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_G x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k}\,dx. \tag{3}$$

Integrînd prin părți fiecare termen al membrului drept în raport cu variabila corespunzătoare, obținem că membrul drept al formulei (3) se poate reprezenta sub forma :

$$\frac{1}{\lambda}\int_\Gamma f^\lambda(x)[x_1\,dx_2\ldots dx_n - x_2\,dx_1\,dx_3\ldots dx_n + \ldots + x_n\,dx_1\ldots dx_{n-1}] - \frac{m}{\lambda}\int_G f^\lambda(x)\,dx$$

și deci

$$\int_G f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)[x_1\,dx_2\ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1\ldots dx_{n-1}]. \tag{4}$$

Introducînd valoarea găsită pentru $\int_G f^\lambda(x)\,dx$ în formula (2), obținem :

$$(f^\lambda,\varphi) = \int_G f^\lambda(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{R\setminus G} f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)[x_1\,dx_2\ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1\ldots dx_{n-1}]. \tag{5}$$

Fiindcă $f^\lambda(x)$ este o funcție omogenă de grad λ, iar $\varphi(x)-\varphi(0)$ are în punctul $x=0$ un zero de ordinul 1, prima integrală din membrul drept converge pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$. Cea de-a 2-a și cea de-a 3-a integrală converg pentru orice λ, căci domeniul de integrare nu cuprinde originea, iar $\varphi(x)$ este cu suport compact. Așadar membrul drept al formulei (5) are sens pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ și este o funcție analitică de λ, primul său pol depinzînd de dimensiunea spațiului, anume el găsindu-se în $\lambda=-n$.

Formula (2) dă prin urmare forma explicită a prelungirii analitice a distribuției $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ pe domeniul $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -n$. Înainte de a continua prelungirea analitică, să studiem mai amănunțit reziduul pentru $\lambda=-n$, care va juca un rol însemnat

în continuare. Reziduul lui $\int f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx$ în punctul $\lambda=-n$ este egal, după cum se vede din formula (5) cu

$$\varphi(0)\int_\Gamma \frac{x_1\,dx_2\ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1\ldots dx_{n-1}}{f^n(x)}. \tag{6}$$

Introducem forma diferențială

$$x_1\,dx_2\ldots dx_n - x_2\,dx_1\,dx_3\ldots dx_n + \ldots \pm x_n\,dx_1\ldots dx_{n-1},$$

pe care o notăm cu ω. Este ușor de arătat că dacă σ este elementul de arie, atunci $\frac{1}{n}\int_\sigma \omega$ este volumul conului cu vîrful în origine și care are drept bază suprafața σ.

Să presupunem că suprafața Γ este dată de ecuația $P(x)=1$, $P(x)$ fiind o funcție omogenă ajutătoare de grad 1, și să arătăm că în acest caz forma ω este legată de suprafața $P(x)-1=0$ în sensul explicat la §1.2. Pentru a verifica aceasta este suficient de arătat că în punctele suprafeței Γ avem

$$dP\cdot\omega = dx_1\ldots dx_n.$$

Să introducem aici expresia lui $dP = \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial x_n}dx_n$ și cea a lui ω ; folosind regula $dx_i\,dx_j = -dx_j\,dx_i (i\neq j)$ și $dx_i\,dx_i = 0$, obținem în membrul stîng

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}x_1 + \ldots + \frac{\partial P x_n}{\partial x_n}\right)dx_1\ldots dx_n.$$

Conform formulei lui Euler, expresia ce figurează în paranteză este pur și simplu P, și prin definiție $P=1$ pe suprafața Γ.

Reziduul funcției $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ pentru $\lambda=-n$ se scrie pe scurt

$$\varphi(0)\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{7}$$

Expresia (7), fiind reziduul unei funcții analitice nu depinde de alegerea suprafeței Γ^*. Prin urmare, $\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ este determinat de funcția $f^{-n}(x)$ în orice vecinătate a originii.

Vom numi mărimea $\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ *reziduul funcției* $f^{-n}(x)$ (omogene, cu grad de omogenitate $-n$) *în origine*. (Subliniem că acesta nu coincide cu reziduul distribuției f^λ în punctul $\lambda = -n$; ultimul este egal cu $\int \frac{\omega}{f^n(x)}\,\delta(x)$). Să remarcăm de asemenea că dacă reziduul funcției $f^{-n}(x)$ în origine este egal cu zero, atunci distribuția, analitică în λ, $f^\lambda(x)$ nu are un pol în $\lambda = -n$, și din proprietatea (4) din § 3.1, rezultă că formula (5) definește în acest caz o distribuție omogenă de grad $-n$. Vom avea în vedere aceasta în punctul următor al acestui paragraf.

Reziduul unei funcții omogene de grad $-n$ are o interpretare geometrică simplă. Într-adevăr, să alegem drept suprafață închisă Γ suprafața de nivel $f(x) = 1$. În acest caz reziduul se scrie $\int_\Gamma \omega$. Pentru că $\int_\Gamma \omega$ este egală cu de n ori volumul conului ce se sprijină pe suprafața σ, obținem că reziduul funcției $f^{-n}(x)$, adică $\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ este egal cu nV, unde V este volumul domeniului $f(x) \leqslant 1$.

Să trecem acum la prelungirea analitică în continuare a integralei. Ca și mai înainte, adică scăzînd din $\varphi(x)$ termeni succesivi ai dezvoltării sale Taylor, și apoi adunîndu-i, se poate obține o formulă analoagă lui (5) și care dă prelungirea analitică a distribuției noastre în semiplanul $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$. Pentru aceasta trebuie dat integralelor de forma

$$\int_G f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dx$$

* Lăsăm în sarcina cititorului demonstrarea acestui fapt.

aceeași formă care s-a dat lui

$$\int_G f^\lambda(x)\,dx,$$

exprimîndu-le ca integrale pe suprafața Γ, frontiera lui G, utilizînd omogenitatea funcției $f^\lambda(x)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$. Formula definitivă va fi

$$\int_G f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx = \int_G f^\lambda(x)\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - \dots -$$

$$(8)\quad -\frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]\,dx + \int_{R\setminus G} f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx +$$

$$+\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!\,(\lambda+n+m)}\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m}\frac{\partial^m\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\int_\Gamma f^\lambda(x)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\omega.$$

Rezultă din această formulă că $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ este o funcție analitică pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$, $\lambda \neq -n, -n-1, \dots, -n-k$ (pentru $\lambda = -n-k-1$ prima integrală nu mai converge). În punctele $\lambda = -n-m$ $(m = 0, 1, \dots, k)$, $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ are poli simpli ai căror reziduuri sînt evident din ultimul termen al formulei (8). Anume, reziduul distribuției $f^\lambda(x)$ pentru $\lambda = -n-m$ este egal cu

$$(9)\qquad \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m}\frac{\partial^m\delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\int_\Gamma \frac{x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega.$$

Astfel, pentru distribuția $f^\lambda(x)$ sînt valabile, de pildă, relațiile

$$\lim_{\lambda\to-n}(x+n)f^\lambda(x) = \delta(x)\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)},$$

$$\lim_{\lambda\to-n-1}(\lambda+n+1)f^\lambda(x) = -\frac{\partial\delta(x)}{\partial x_1}\int_\Gamma \frac{x_1\omega}{f^{n+1}(x)} - \dots - \frac{\partial\delta(x)}{\partial x_n}\int_\Gamma \frac{x_n\omega}{f^{n+1}(x)}$$

ș.a.m.d.

Integrala $\int \frac{x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega$ nu depinde de alegerea suprafeței Γ. Dacă se ia drept Γ suprafața $f(x)=1$, atunci obținem pentru această

integrală expresia $\int_{f=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega$, egală cu aproximația unui factor, cu unul din momentele de ordinul m ale domeniului mărginit de suprafața $f(x) = 1$.

Aceasta se demonstrează astfel. Să considerăm momentul domeniului $f \leqslant 1$, egal cu integrala

$$I = \int_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dx.$$

Introducem în domeniul $f \leqslant 1$ noi coordonate $u_1 = f,\ u_2, \dots, u_n$ cu jacobianul $D\left(\frac{x}{u}\right) \neq 0$. În aceste coordonate,

$$dx = D\left(\frac{x}{u}\right) du_1\, du_2 \dots du_n.$$

Notăm

$$\omega = D\left(\frac{x}{u}\right) du_2 \dots du_n.$$

Pe suprafața $f = 1$ această formă coincide cu cea considerată în text. Scriem integrala I sub forma

$$I = \int_0^1 \int_{f=c} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dc.$$

Este evident că a doua integrală este o funcție omogenă de argument c, de grad de omogenitate $\alpha_1 + \dots + \alpha_n - n + 1$. Înseamnă că

$$\int_{f=c} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega = c^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-n+1} \int_{f=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega$$

și

$$I = \int_{f=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega \int_0^1 c^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-n+1}\,dc,$$

deci

$$\int_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dx = \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - n + 2} \int_{f=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega.$$

Așadar, reziduul distribuției $f^\lambda(x)$, analitică în λ, în punctul $\lambda = -n - m$ este rezultatul acțiunii unui operator diferențial de ordinul m cu coeficienți constanți, aplicat lui $\delta(x)$. Cu aproximația unui factor ce nu depinde de f, coeficienții acestuia sînt egali cu toate momentele de ordinul m ale domeniului mărginit de suprafața $f = 1$.

Integralele

$$\int_\Gamma \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m)$$

vor fi numite, prin analogie cu cea ce precede, *reziduurile funcției* $f^{-n-m}(x)$ (f omogenă de gradul $-n-m$). Reziduul distribuției $f^\lambda(x)$ în punctul $\lambda = -n - m$ este egal cu combinația lor liniară cu coeficienții respectiv $\frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m \delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Dacă toate reziduurile funcției omogene $f^{-n-m}(x)$ sînt nule, atunci, conform formulei (8), pentru $\lambda = -n - m$ îi corespunde o distribuție omogenă de grad $-n - m$. Vom utiliza această observație în § 3.5.

Pentru calculul distribuției f^λ pentru $\operatorname{Re}\lambda < -n$ se poate da în locul formulei (8) o formulă mai utilă și mai simetrică. Pentru aceasta remarcăm că pentru $\operatorname{Re}\lambda < -n - k$ integralele de forma

$$\int_{R\setminus G} f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dx \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m < k), \tag{10}$$

converg. Frontiera domeniului $R\setminus G$ este aceeași suprafață Γ (frontiera lui G), cu orientarea opusă, și deci, transformînd integrala (10) într-o integrală de suprafață, obținem:

$$\int_{R\setminus G} f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,dx = -\frac{1}{\lambda + m + n} \int_\Gamma f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,\omega.$$

Înlocuind astfel în formula (8) integralele pe suprafața Γ prin integrale pe domeniul $\Gamma\setminus G$ și reunind aceste integrale într-una singură, obținem pentru regularizata integralei reprezentarea,

$$\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx = \int f^\lambda(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \dots - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \cdot \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx \tag{11}$$

valabilă în banda $-n - k - 1 < \operatorname{Re}\lambda < -n - k$.

Să remarcăm că dacă $\Phi(x)$ este o funcție omogenă arbitrară de grad λ (nu neapărat de semn constant), avînd o singularitate doar în originea coordonatelor, și astfel ca $-n-k-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n-k$, atunci formula (11) poate fi aplicată pentru a regulariza integrala

$$\int \Phi^{\lambda}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Funcționala obținută astfel va fi o distribuție omogenă de grad λ. Astfel, fiecărei funcții formal omogene $\Phi(x)$ de grad λ, $\lambda \neq -n-k$ îi corespunde prin formula (11) o distribuție omogenă de același grad, regularizata funcției $\Phi(x)$. Deoarece funcțiile omogene de orice grad avînd doar în origine o singularitate, pot fi definite dîndu-se valorile pe orice suprafață închisă Γ ce taie într-un singur punct orice rază plecînd din origine, putem spune că *oricărei funcții continue pe o astfel de suprafață închisă* Γ, *îi corespunde o distribuție omogenă de grad* λ *cu* $\lambda \neq -n-k$.

3.3. **Distribuții omogene de grad** $-n$. Să considerăm o funcție formal omogenă $\Phi(x) \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ de grad $-n$, care nu trebuie neapărat să aibă semnul constant, avînd o singularitate (din punct de vedere al integrabilității locale) doar în origine. Pentru a defini distribuția corespunzătoare și totodată a regulariza integrala divergentă

$$\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx,$$

alegem un domeniu oarecare G ce conține originea și punem

$$(1)\qquad \int \Phi(x)\varphi(x)\,dx = \int_G \Phi(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{R\setminus G} \Phi(x)\varphi(x)\,dx.$$

Regularizata definită astfel a integralei

$$\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx,$$

depinde desigur de alegerea domeniului G. Să notăm cu $\Phi|_G$ distribuția astfel obținută și să clarificăm cum se modifică ea la schimbarea domeniului G într-un alt domeniu G_1. Se vede direct că la trecerea de la G la G_1, $G_1 \subset G$, obținem o funcțională ce diferă cu

$$\varphi(0)\int_{G-G_1} \Phi(x)\,dx$$

de cea inițială. Astfel,

$$(2)\qquad \Phi|_G - \Phi|_{G_1} = \delta(x)\int_{G-G_1} \Phi(x)\,dx.$$

Rezultă deci din formula (2) că diferența distribuțiilor $\Phi|_G$ și $\Phi|_{G_1}$ este o distribuție omogenă de grad $-n$, deci faptul de a fi sau nu omogene a distribuțiilor definite de formula (1), nu depinde de alegerea domeniului G.

Ne interesează acum, cînd o distribuție definită de forma (1) este omogenă de grad $-n$, adică cînd este îndeplinită condiția

$$\left(\Phi,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (\Phi, \varphi).$$

Mai înainte de a trece la calcule, să comparăm formula (1) din acest punct cu formula (5) de la § 3.2. Dacă în prima dintre aceste formule facem $\Phi = f^{-n}$, $f(x)$ fiind o funcție omogenă pozitivă de gradul 1, obținem formula (5) din § 3.2 cu diferența că $\int f^{-n}(x)\omega$, adică reziduul funcției $f^{-n}(x)$ este înlocuit acum cu zero. Pe de altă parte, anularea acestui reziduu este necesară și suficientă pentru ca distribuția $f^{\lambda}(x)$, analitică în λ, să nu aibă pol în $\lambda = -n$, adică, după cum am remarcat la § 3.2, ca formula (5) din § 3.2 să definească, pentru $\lambda = -n$ o distribuție omogenă de grad $-n$.

Arătăm acum că în cazul general pentru ca distribuția (1) să fie omogenă de grad $-n$ este necesară și suficientă o condiție asemănătoare.

Efectuînd în integrala

$$\int_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\varphi(0)\right]dx + \int_{R\setminus G} \Phi(x)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$$

schimbarea de variabile $\frac{x_k}{\alpha} = x_k'$ și notînd cu αG domeniul obținut din G printr-o omotetie de coeficient α, vom avea

$$\int_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\varphi(0)\right]dx + \int_{R\setminus G} \Phi(x)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx =$$

$$= \int_G \Phi(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{R\setminus G} \Phi(x)\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx.$$

Este evident că, pentru omogenitatea distribuției $\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx$ este necesar și suficient ca

$$\int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx = 0,$$

pentru orice α.

Să transformăm această condiție. Pentru aceasta introducem în domeniul $G - \alpha G$ sistemul de coordonate $\rho, u_1, \ldots, u_{n-1}$, unde $\rho = 1$ și $\rho = \alpha$ sînt ecuațiile suprafețelor Γ și respectiv $\alpha\Gamma$, iar $u_1, \ldots u_{n-1}$ coordonate pe suprafețele $\rho = \text{const}$.

Să notăm $x_k = \rho x'_k$. Atunci,

$$dx_1 \ldots dx_n = D\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ \rho u_1 \ldots u_{n-1} \end{pmatrix} d\rho\, du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= \rho^{n-1}\, d\rho (x'_1\, dx'_2 \ldots dx'_n - x'_2\, dx'_1\, dx'_3 \ldots dx'_n + \ldots$$

$$\ldots \pm x'_n\, dx'_1 \ldots dx'_{n-1}) = \rho^{n-1}\, d\rho\omega,$$

unde forma diferențială ω este considerată pe suprafața $\rho = 1$. Pe de altă parte $\Phi(x) = \rho^{-n}\Phi(x')$. Deci,

$$(3) \qquad \int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx = \int_1^\alpha \frac{d\rho}{\rho} \int_\Gamma \Phi(x)\omega = \ln \alpha \int_\Gamma \Phi(x)\omega.$$

Așadar, *o condiție necesară și suficientă pentru ca regularizata integralei* (1) *a unei funcții* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, *formal omogene, adică distribuția* $\Phi|_G$, *să fie o distribuție omogenă de grad* $-n$, *este ca*

$$(4) \qquad \int_\Gamma \Phi\omega = 0.$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci distribuția $\Phi|_G$ nu este omogenă, ci o distribuție asociată.

Vom numi integrala ce figurează în formula (4) *reziduul funcției* $\Phi(x)$ *față de origine* (aceasta constituie o generalizare a definiției date în § 3.3). Așadar, pentru ca distribuția (1) să fi omogenă de ordin $-n$ este necesar și suficient ca reziduul funcției $\Phi(x)$ față de origine să fie nul.

Derivarea funcțiilor omogene de grad $-n + 1$. Am întîlnit adesea în capitolul I situația următoare: o funcție local integrabilă f are o derivată uzuală peste tot cu excepția unor puncte izolate, dar această derivată nu este o funcție local integrabilă (așa încît ar fi mai corect s-o numim *derivata formală* a funcției). În acest caz nu știm să calculăm automat derivata în sensul distribuțiilor a funcției f și de fiecare dată trebuie să recurgem la considerente speciale. De pildă, în cap. I, § 2.3 pentru calculul operatorului lui Laplace aplicat lui $1/r$ în spațiul tridimensional a trebuit în esență să repetăm raționamentul clasic obișnuit, cu înlăturarea unei vecinătăți a originii și aplicarea formulei lui Green. Un astfel de procedeu se reduce în fapt la o formulă pe care o demonstrăm acum.

Fie Φ *o funcție uzuală local integrabilă de grad* $-n + 1$. Atunci,

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G + (-1)^{i-1}\delta(x_1, \ldots, x_n) \int_\Gamma \Phi\, dx_1, \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Aici, în membrul stîng $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ *este derivata funcției* Φ *în sensul distribuției, iar în dreapta* $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G$ *este distribuția construită plecînd de la derivata formală, adică de la derivata în sens uzual a funcției* Φ. *Cu* Γ *s-a notat frontiera lui* G.

Avem într-adevăr

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(\Phi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\int \Phi(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= -\int_G \Phi(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi(x_1, \ldots, x_n) - \varphi(0, \ldots, 0)]\, dx_1 \ldots dx_n -$$

$$- \int_{R \setminus G} \Phi(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \varphi(0, \ldots, 0)}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Aici $R \setminus G$ este complementara lui G.

Făcînd acum o integrare prin părți, obținem funcționala $\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G, \varphi\right)$, iar dintre integralele pe suprafața Γ, doar integrala

$$(-1)^{i-1}\varphi(0)\int_\Gamma \Phi \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$$

nu se anulează. Astfel formula (5) a fost demonstrată. Cum membrul său stîng nu depinde de domeniul G, nici membrul drept nu va depinde de G. Lăsăm cititorului sarcina de a verifica acest lucru și direct.

Exemple.

1. Să demonstrăm formula

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=2\pi\delta(x,y). \tag{6}$$

Avem,

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Aceasta este adevărat și în sens uzual și în sensul distribuțiilor pentru că funcția $2x/(x^2+y^2)$ este local integrabilă. Obținem atunci, conform formulei (5),

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\ln(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^2}=\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_G+2\delta(x,y)\int_\Gamma\frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Analog,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln(x^2+y^2)=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_G-2\delta(x,y)\int_\Gamma\frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

Adunînd aceste două formule, obținem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=\delta(x,y)\int_\Gamma\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

Luînd drept curbă Γ circumferința cu centrul în origine, găsim ușor că $\int_\Gamma \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi$. Această demonstrează formula (6). Rezultă din aceasta că în spațiul cu două dimensiuni

$$\Delta\ln\frac{1}{r}=2\pi\delta(x,y)$$

$$\left(r^2=x^2+y^2,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

2. Să calculăm $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ în spațiul cu 3 dimensiuni ($r^2=x^2+y^2+z^2$). Se poate deriva odată în sens uzual

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-\frac{z}{r^3}.$$

Derivatele formale ale membrilor drepți sînt egale respectiv cu:

$$\frac{3x^2-r^2}{r^5},\quad \frac{3y^2-r^2}{r^5},\quad \frac{3z^2-r^2}{r^5},$$

și suma lor este nulă. Aplicînd de trei ori formula (5) și sumînd rezultatele găsim

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}=\delta(x,y,z)\int_\Gamma\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{r^3}.$$

Să alegem drept Γ sfera și să trecem la coordonate polare; obținem că integrala din membrul drept este egală cu -4π. Așadar, în spațiul cu 3 dimensiuni

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(x,y,z). \tag{7}$$

Analog se calculează fără dificultate $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ în spațiul cu n dimensiuni ($n\geqslant 3$) și se obține formula dată în cap. I, § 2.3.

Să lămurim acum, oarecum pe alt plan, de ce anularea reziduului unei funcții omogene $\Phi(x)$ de grad $-n$ este condiția ce asigură omogenitatea distribuției corespunzătoare, precum și rolul noțiunii de reziduu.

Cum $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție formal omogenă de grad $-n$, atunci, conform relației lui Euler

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = -n\Phi,$$

au sub altă formă

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k \Phi) = 0.$$

Această egalitate este formală, adică ea este verificată în toate punctele, cu excepția originii, punct în care Φ are o singularitate. Pe de altă parte, după cum știm din § 3.1, ecuația lui Euler înțeleasă în sensul distribuțiilor caracterizează distribuțiile omogene de gradul corespunzător. Să arătăm că dacă $x_k\Phi$ este considerat ca distribuție, atunci are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} = c\delta(x), \tag{8}$$

unde c este reziduul funcției Φ. Într-adevăr, conform formulei (5) avem:

$$\frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} \right)\Big|_G +$$

$$+ \delta(x_1, \ldots, x_n) \int_\Gamma \Phi (-1)^{k-1} x_k \, dx_1 \ldots dx_{k-1} \, dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Sumînd după k obținem:

$$\sum_k \frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} = \left(\sum_k \frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} \right)\Big|_G + \delta(x_1, \ldots, x_n) \int_\Gamma \Phi\omega,$$

și cum $\sum_k \frac{\partial (x_k \Phi)}{\partial x_k} = 0$, ajungem la formula (8).

Prin urmare, dacă $c = \int_\Gamma \Phi\omega \neq 0$, atunci distribuția $\Phi(x)$ nu va fi omogenă în origine. Dacă $\Phi(x)$ este potențialul unui cîmp, atunci această lipsă de omogenitate scoate în evidență existența în acel punct singular a unor surse, sarcini etc.

Am arătat că pentru ca o funcție formal omogenă $\Phi(x)$ de grad $-n$ să definească o distribuție omogenă (regularizata $\int \Phi\varphi dx$) condiția constă în anularea reziduului funcției $\Phi(x)$ în origine.

Pentru funcțiile $\Phi(x)$ de semn constant evident că reziduul nu se va anula, din acest motiv funcțiile omogene de semn constant de grad $-n$ nu pot defini distribuții omogene. Astfel, pe dreaptă, distribuția $\frac{1}{|x|}$ (v. cap. I, § 3) nu este omogenă. În plan, distribuția $\frac{1}{x^2+y^2}$ (mai precis $\frac{1}{x^2+y^2}\Big|_G$, acționînd conform formulei

$$\int \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_\Gamma \frac{\varphi(x,y) - \varphi(0,0)}{x^2+y^2} \, dx \, dy + \int_{K \setminus G} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

nu este omogenă; dar totodată distribuția $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, definită prin formula asemănătoare

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \varphi(x,y) \, dx \, dy = \int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} [\varphi(x,y) - \varphi(0,0)] \, dx \, dy +$$

$$\int_{K \setminus G} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \varphi(x,y) \, dx \, dy$$

este omogenă, căci reziduul funcției $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, este nul (din considerente de simetrie).

3.4. **Distribuţii omogene de grad** $-n-m$. Fie acum $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ o funcţie omogenă de grad $-n-m$, m fiind un număr natural. Să ne dăm iarăşi un domeniu arbitrar G conţinînd originea coordonatelor şi să definim regularizata integralei $\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx$ prin formula

$$\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx = \int_G \Phi(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m!} \sum_{\Sigma\alpha_j=m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx + \tag{1}$$

$$+ \int_{R^n \setminus G} \Phi(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\alpha_j=m-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx.$$

Pentru omogenitatea distribuţiei definite de (1), este necesar şi suficient ca să fie îndeplinite condiţiile:

$$\int_{G-\alpha G} \Phi(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\,dx = 0 \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m),$$

pentru orice α sau, ceea ce este acelaşi lucru (v. § 3.3 şi § 3.4) condiţiile

$$\int_\Gamma \Phi(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega = 0 \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m). \tag{2}$$

Integralele din (2) le vom numi, prin analogie cu cele precedente *reziduurile* funcţiei omogene $\Phi(x)$ de grad $-n-m$.

Aşadar, *pentru ca unei funcţii omogene* $\Phi(x)$ *de ordin întreg* $-n-m$ *să-i corespundă prin formula* (1) *o distribuţie omogenă de grad* $-n-m$ *este necesar şi suficient ca toate reziduurile acestei funcţii să fie nule.*

Pentru a lămuri acest rezultat să comparăm formula (1) cu formula (8) de la § 3.3. Dacă în prima dintre aceste formule introducem $\Phi(x) = f^{-n-m}$, $f(x)$ fiind o funcţie pozitivă, omogenă de grad 1 se obţine atunci formula (8) de la § 3.3, în care integralele $\int_\Gamma f^{-n-m}(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega$ nu mai apar, adică reziduurile funcţiei $f^{-n-m}(x)$ sînt nule. Pe de altă parte, anularea acestor reziduuri este necesară şi suficientă ca distribuţia $f^\lambda(x)$, considerată ca funcţie analitică de λ să nu aibe poli în $\lambda = -n-m$, adică pentru ca formula (8) să definească pentru $\lambda = -n-m$ o distribuţie omogenă de grad $-n-m$. Dacă unul dintre reziduurile lui $f^{-n-m}(x)$ este diferit de zero, atunci regularizata (1) a integralei

$$\int f^{-n-m}(x)\,\Phi(x)\,dx$$

ne dă o distribuţie omogenă asociată, de grad $-n-m$.

Să remarcăm că pentru valorile $\lambda \leqslant -n$, în afara distribuţiilor omogene definite de funcţii obişnuite sînt de asemenea cunoscute distribuţii omogene care nu sînt legate de nici o funcţie uzuală, anume distribuţia $\delta(x)$ şi derivatele sale. Derivata de ordin k a lui $\delta(x)$ este o distribuţie omogenă de grad $-n-k$. Numărul diferitelor derivate de ordin k este exact numărul condiţiilor (2). În acest sens, familia tuturor funcţiilor omogene de ordin $-n-m$, aşa cum se întîmplă şi în cazul lui λ arbitrar neîntreg, coincide cu mulţimea funcţiilor continui pe suprafaţa închisă Γ ce înconjoară originea.

3.5. **Distribuţia** $r^\lambda f$, f **fiind o distribuţie dată de sfera unitate.** Orice funcţie omogenă de grad λ se poate reprezenta sub forma

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(r\omega, r\omega_2, \ldots, r\omega_n) = r^\lambda f(\omega_1, \ldots, \omega_n), \tag{1}$$

$f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ fiind o anumită funcţie dată pe sfera unitate $\Omega : \Sigma\omega_i^2 = 1$. Să presupunem pentru simplitate că $\mathrm{Re}\,\lambda > -n$. Funcţionala regulată corespunzătoare se poate reprezenta sub forma

$$(\Phi(x_1, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \int \Phi\varphi\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} \int_\Omega f(\omega_1, \ldots \omega_n)\varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)\,d\omega = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} u(r)\,dr,$$

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ fiind o funcție test arbitrară (din K), iar

$$u(r) = \int_{\Omega} \ldots \int f(\omega_1, \ldots \omega_n)\varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)\, d\Omega.$$

Aici, ca de obicei, $d\Omega$ este elementul de arie al sferei unitate.

Fie acum $f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ o distribuție oarecare definită pe sfera Ω. Putem să definim distribuția

$$\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = r^\lambda f(\omega_1, \ldots, \omega_n), \tag{2}$$

prin formula

$$(\Phi_\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} u(r)\, dr, \tag{3}$$

unde

$$u(r) = (f, \varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)). \tag{4}$$

Funcția $u(r)$ este cu suport compact și indefinit derivabilă odată cu $\varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)$. Faptul că u este indefinit derivabilă în raport cu r se vede, de pildă, din faptul că

$$\frac{\partial \varphi(r\,\omega_1, \ldots, r\,\omega_n)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

ș.a.m.d.

Din formula (2) se vede că *funcționala* Φ *este o funcție analitică de* λ *pentru* $\lambda \neq -n, -n-1, \ldots$; *în punctele* $\lambda = -n, -n-1, \ldots$ *... are poli simpli.*

Calculăm reziduul acestei funcții analitice pentru $\lambda = -n$. Avem:

$$(\Phi_\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}(f, \varphi(r\omega_1, \ldots r\,\omega_n))\, dr = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} u(r)\, dr =$$

$$= \int_0^1 r^{\lambda+n-1}(u(r) - u(0))\, dr + \int_1^\infty r^{\lambda+n-1} u(r)\, dr + \frac{u(0)}{\lambda+n},$$

În expresia obținută, primele două integrale sînt regulate pentru $Re\lambda > -n-1$. De aceea pentru $\lambda = -n$ reziduul lui (Φ_λ, φ) este egal cu

$$u(0) = c\varphi(0),$$

unde $c = (f, 1)$ — valoarea funcționalei f pe funcția test egală cu 1 pe sfera unitate Ω. Așadar, reziduul distribuției Φ_λ pentru $\lambda = -n$ este egal cu $\delta(x_1, \ldots, x_n)$.

Este ușor de arătat că, dacă distribuția f depinde de asemenea analitic de λ, $f = f_\lambda$, și dacă această funcție este regulată pentru $\lambda = -n$, atunci $\Phi_\lambda = r^\lambda f_\lambda$ are un reziduu pentru $\lambda = -n$ egal cu $c_{-n}\delta(x_1, \ldots, x_n)$, unde $c_{-n} = (f_\lambda, 1)$, pentru $\lambda = -n$. Calculăm acum reziduul distribuției $\Phi_\lambda = r^\lambda f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ pentru $\lambda = -n-k$. Reziduul funcției analitice numerice (Φ_λ, φ) pentru $\lambda = -n-k$ este egal cu $\frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}} u(r)\Big|_{r=0}$. Dar

$$u(r) = (f, \varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)).$$

Deci

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}} u(r)\Big|_{r=0} = \left(f, \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}} \varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)\right) =$$

$$= \sum_{\Sigma\alpha_j = k-1} (f, \omega_1^{\alpha_1}, \ldots \omega_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{x_1 = \ldots = x_n = 0} =$$

$$= \sum_{\Sigma\alpha_j = k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(0, \ldots, 0)\ (f, \omega_1^{\alpha_1}, \ldots, \omega_n^{\alpha_n}).$$

Funcționala $f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ fiind definită pe suprafața $r = 1$, unde $\omega_i = x_i$, obținem că reziduul funcționalei Φ_λ pentru $\lambda = -n-k$ este egal cu

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{\Sigma\alpha_j = k-1} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \delta(x_1, \ldots, x_n),$$

unde $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = (f, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n})$.

§ 4. Funcții oarecare la puterea λ

4.1. **Definiția punctelor singulare reductibile.** Fie $G(x_1, \ldots x_n)$ o funcție indefinit derivabilă arbitrară. Vom considera în acest paragraf distribuția $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, adică vom studia funcționala,

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)\ dx_1 \ldots dx_n \tag{1}$$

ca funcție analitică de λ. Punctele singulare ale acestei funcții analitice sînt strîns legate de caracterul suprafeței $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Nu ne vom ocupa de cazul în care suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ este arbitrară, ci ne vom mărgini la cazul cel mai important în toate aplicațiile, și anume cînd această suprafață constă numai din puncte pe care le numim *reductibile*.

Funcția $G(x_1, \ldots, x_n)$ se numește *echivalentă cu o funcție omogenă în vecinătatea unui punct* M, dacă în acea vecinătate există un sistem local de coordonate $\xi_1, \ldots, \xi_n$ în care funcția $G(x_1, \ldots, x_n)$ devine omogenă. Este clar că echivalența cu o funcție omogenă se poate defini nu numai în spațiul afin ci și pe orice varietate analitică, de pildă pe sferă.

Definiția punctului reductibil se face prin inducție după dimensiunea spațiului și a suprafeței. Să presupunem deci că noțiunea de punct reductibil a fost definită pentru spații sau suprafețe de dimensiune inferioară lui n. Punctul M de pe suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ va fi numit *reductibil*, dacă:

1) Într-o anumită vecinătate a punctului M, funcția $G(x_1, \ldots, x_n)$ este echivalentă cu o funcție omogenă;

2) intersecția suprafeței $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ cu o sferă suficient de mică, centrată în M este o suprafață a căror puncte sînt toate reductibile pe sferă.

Pentru o funcție $G(x)$ definită pe axa reală a doua cerință, bineînțeles, nu apare. În acest caz, punctul x_0, în care $G(x_0) = 0$ se numește reductibil dacă în vecinătatea lui x_0 există o funcție inversabilă, indefinit derivabilă $\xi = X(x)$, $X(x_0) = 0$, astfel ca

$$G[X^{-1}(\xi)] \equiv \xi^m$$

În vecinătatea unui punct reductibil M se pot introduce coordonate locale $\xi_1, \ldots, \xi_n$ astfel încît funcția G să devină o funcție omogenă de grad m în $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Dacă aceste coordonate locale, în vecinătatea unui punct reductibil M pot fi alese astfel ca funcția G să depindă de k variabile, și nu pot fi alese ca funcția G să depindă de mai puține variabile, punctul M se numește *punct de ordin k și grad m*.

În acest mod, fiecărui punct al suprafeței i se pot asocia două numere; ordinul k și numărul m ale acestui punct. În particular, dacă pe suprafața $G = 0$, grad $G \neq 0$, atunci fiecare punct al acestei suprafețe va fi punct de ordinul 1 și gradul 1. Într-adevăr, în vecinătatea oricărui astfel de punct se poate alege drept una dintre coordonate însăși funcția $G(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1$ și oricare alte coordonate $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Este clar că în acest sistem de coordonate funcția $G(x_1, \ldots, x_n)$ se reduce la ξ_1, adică la o funcție omogenă de gradul 1, și de o

singură variabilă. Înseamnă că un punct ordinar al suprafeței este punct de ordinul 1 și de gradul 1. Dacă, de exemplu, suprafața $G = 0$ este formată, în spațiul cu trei dimensiuni, din cele trei plane de coordonate ($G = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$), atunci originea este un punct de ordinul 3, axele de coordonate sînt formate din puncte de ordinul 2, iar restul punctelor suprafeței sînt puncte de ordinul 1. Lăsăm cititorului să găsească gradele fiecăruia din aceste puncte singulare.

Avînd în vedere că studiul integralei (1) în cazul general ar putea ridica dificultăți, în § 4.2 vom considera cazul în care suprafața $G = 0$ are doar puncte de ordinul 1, în § 4.3, cazul în care pe suprafața $G = 0$ se găsesc puncte singulare de cel mult ordinul 2 și de abia în § 4.4 vom considera cazul general.

În acest punct vom utiliza teorema următoare, pe care o dăm fără demonstrație.

Fie $G(x_1, \ldots, x_n)$ un polinom. Dacă suprafața $G = 0$ constă doar din puncte reductibile, atunci ea se descompune într-un număr finit de componente conexe, fiecare din acestea fiind formate din puncte de același ordin și de același grad. Anume, pe suprafața $G = 0$ se găsește un număr finit de puncte de ordinul n, un număr finit de linii de puncte de ordinul $(n-1)$ ș.a.m.d., în sfîrșit un număr finit de componente de dimensiune $(n-1)$ formate doar din puncte de ordinul 1.

Cum în vecinătatea unui punct de ordinul 1 se pot introduce coordonate locale în care funcția noastră G depinde de o singură variabilă în vecinătatea unui punct de ordinul 2, G depinzînd de două variabile în sistemul corespunzător de coordonate locale ș.a.m.d., atunci considerarea de funcții cu puncte reductibile de ordinul 1 conduce la studiul distribuțiilor de singură variabilă independentă, considerarea funcțiilor cu puncte reductibile de ordinul 2 la studiul distribuțiilor de două variabile ș.a.m.d.

În încheierea acestui punct să remarcăm, că, după cum s-a demonstrat la pct. 2 al anexei 1 la cap. I, dacă avem o acoperire a spațiului cu un sistem numărabil de domenii deschise D_i cu proprietate că orice sferă intersectează doar un număr finit dintre aceste domenii, atunci orice funcție test $\varphi(x)$ se poate reprezenta sub forma unei sume finite $\varphi(x) = \sum \varphi_i(x)$ de funcții test φ_i, fiecare φ_i avînd suportul conținut în D_i. Așadar, ori de cîte ori va fi nevoie vom putea presupune că funcția $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este diferită de zero doar într-o vecinătate oricît de mică a punctului ce ne interesează.

Studiul integralei (1), care depinde de un singur parametru complex se va face considerînd o funcție auxiliară depinzînd de două

variabile complexe. Această metodă va fi descrisă în § 4.3 în cazul cel mai simplu.

4.2. **Studiul distribuției G în cazul în care suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$** *este formată doar din puncte de ordinul* 1. Fie $G(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție indefinit derivabilă, cu proprietatea că suprafața $G = 0$ este marginită și este formată numai din puncte de ordinul 1.

Să considerăm funcționala, depinzînd de λ:

$$(2) \qquad (G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Pentru $Re\lambda > 0$ această integrală converge și este o funcție analitică de λ. Vom arăta că *distribuția G^λ este o funcție meromorfă de λ. Fiecărei componente conexe a varietății $G = 0$, constînd din puncte de grad l, îi corespunde un șir de poli simpli*

$$(3) \qquad \lambda = -\frac{1}{l}, -\frac{2}{l}, \ldots, -\frac{n}{l}, \ldots$$

În particular, dacă pe suprafața $G=0$ nu sînt puncte singulare, atunci G are poli doar în punctele

$$\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$$

Pentru demonstrația acestei afirmații alegem un punct oarecare M pe suprafața $G = 0$. Pe baza observațiilor făcute mai înainte, putem presupune fără a micșora generalitatea că $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ identic în afara unei vecinătăți D a punctului M. Să notăm cu D_1, intersecția domeniului D cu domeniul $G \geqslant 0$. Atunci,

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1 \ldots x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{D_1} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots dx_n.$$

Punctul M fiind de ordinul 1 (și de gradul l) putem introduce în D_1 un sistem de coordonate în care $G(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1^l$, iar restul de $n-1$

coordonate $\xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt alese funcții indefinit derivabile de $x_1, \ldots x_n$ supuse singurei condiții ca în D_1 să avem:

$$D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} > 0.$$

În noile coordonate

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(\xi_1, \ldots \xi_n)$$

și

$$\int_{D_1} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{D_1} \ldots \int \xi_1^{\lambda l}\, \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n.$$

Să notăm

$$(4) \qquad \psi(\xi_1) = \int \ldots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n,$$

integrala calculîndu-se pe intersecția domeniului D_1 cu suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1^l = \text{const}$. Funcția $\psi(\xi_1)$ este cu suport compact și indefinit derivabilă în variabila ξ_1, definită în domeniul D_1. Putem exprima pe (G^λ, φ) în ajutorul acestei funcții astfel:

$$(5) \qquad (G^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty \xi_1^{\lambda l}\, \psi(\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1.$$

Amintindu-ne de rezultatele din cap. I, § 3.2 privind polii și reziduurile funcționalei $\int_0^\infty x^\lambda \psi(x)\mathrm{d}x$, obținem că fiecărui punct M de ordinul 1 și de grad l de pe varietatea $G = 0$ îi corespunde un șir de poli ai distribuției $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\lambda = -\frac{1}{l}, -\frac{2}{l}, \ldots, -\frac{n}{l}, \ldots$$

Reziduul integralei (5) pentru $\lambda l = -n$, adică pentru $\lambda = -\frac{n}{l}$ se exprimă uşor cu ajutorul funcţiei ψ date de formula (4); el este egal cu $\frac{\psi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$.

Să găsim acum rezidul lui G^λ.

Reziduul lui (G^λ, φ) pentru $\lambda = -\frac{1}{l}$ este egal cu $\psi(0)$, adică

$$\int \cdots \int \varphi_1(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix}\Big|_{\xi_1=0} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n,$$

unde $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Notînd cu ω forma diferenţialei ce înmulţeşte pe φ_1 în integrala (4)

$$\omega = D\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n, \tag{6}$$

reziduul se poate scrie sub forma

$$\int_G \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \omega. \tag{7}$$

Dar

$$\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}v = \mathrm{d}\xi_1\, \omega$$

şi dacă notăm

$$G^{1/l}(x_1, \ldots c_n) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

vom avea

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}P\omega.$$

Reamintindu-ne de definiţia distribuţiei $\delta(P)$, dată în § 3.3, vedem că reziduul (7) este tocmai $(\delta(P), \varphi)$. Aşadar, *reziduul lui G pentru $\lambda = -1/l$ este egal cu $\delta(G^{1/l})$.*

Să găsim celelalte reziduuri. Pentru aceasta folosim faptul că funcţia

$$\psi(\xi_1) = \int \cdots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n$$

se poate deriva sub semnul integral. Reziduul lui (G^λ, φ) pentru $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ este egal cu

$$\frac{1}{k!} \int \cdots \int \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \left[\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \right]_{\xi_1=0} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n =$$

$$= \frac{1}{k!} \int_{P=0} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \left[\varphi \cdot D\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n.$$

Avînd în vedere formula (6) din § 1.3 vedem că reziduul lui (G^λ, φ) pentru $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ este egal cu

$$\frac{1}{k!} \int_{P=0} \omega_k(\varphi) = \left(\frac{(-1)^k}{k!}\, \delta^{(k)}(P), \varphi \right). \tag{8}$$

Aşadar, reziduul distribuţiei G^λ pentru $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ este egal cu

$$\frac{(-1)^k}{k!}\, \delta^{(k)}(G^{1/l}). \tag{9}$$

Pe baza observaţiilor făcute la § 4.1 putem presupune acum că funcţia test $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este diferită de zero într-un domeniu mărginit oarecare. Calculînd deci reziduul pentru $\lambda = \frac{k+1}{l}$, în formula (8) trebuie integrat doar pe acele componente ale suprafeţei $G = 0$ care constau din puncte de grad l. Desigur că dacă λ aparţine mai multor serii de puncte de forma (3), reziduul în punctul λ se va obţine adunînd valorile reziduurilor corespunzînd valorilor corespunzătoare ale lui l.

Să remarcăm că atunci cînd suprafaţa $G = 0$ constă din puncte de ordinul 1 şi de grad 1, funcţia analitică G^λ are poli pentru exact acei λ pentru care funcţia de o variabilă $(x^l)_+^\lambda$ are poli (v. cap. I, § 3). Reziduul lui $(x^l)_+^\lambda$ pentru $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ este egal cu $\frac{(-1)^k}{k!}\, \delta^{(k)}(x)$, iar reziduul lui G^λ pentru $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ este egal cu $\frac{(-1)^k}{k!}\, \delta^{(k)}(G^{1/l})$.

Așadar, cazul în care $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ constă doar din puncte de ordinul 1 este perfect analog cazului unei singure variabile independente.

4.3. **Studiul distribuției G^λ atunci cînd suprafața $G(x_1, \ldots x_n) = 0$ nu conține puncte de ordin mai mare ca 2.** Să presupunem acum că suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ este formată din puncte reductibile de ordin cel mult 2. Fiecare vecinătate suficient de mică a unui punct de ordinul 1 dă naștere unei serii de poli ai distribuției $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ definite de

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

serie considerată în § 4.2. Ne rămîne deci de lămurit ce influență privind comportarea acestei funcționale ca funcție λ o au punctele reductibile de ordinul 2 (care desigur vor fi puncte singulare ale suprafeței $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$).

Arătăm că *o vecinătate a unui punct M de ordin 2 și de grad m dă naștere la o serie de poli ai funcției $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$:*

$$\lambda = -\frac{2}{m}, -\frac{3}{m}, \ldots, -\frac{k}{m}, \ldots \tag{1}$$

În general, într-o vecinătate suficient de mică a unui punct de ordinul 2 există puncte de ordinul 1, eventual de grade diferite. Dacă o valoare $\lambda = \lambda_0$ aparține simultan seriei (1) și uneia sau mai multor serii corespunzînd punctelor de ordinul 1, dintr-o vecinătate oarecare a punctului M (incidente punctului M), atunci distribuția $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ are, pentru $\lambda = \lambda_0$, un pol de ordinul 2.

Pentru demonstrație vom alege în integrala

$$\int_{G<0} \ldots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1 \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

o funcție φ diferită de zero doar într-o vecinătate suficient de mică a punctului M și alegem un sistem local de coordonate $\xi_1, \ldots, \xi_n$ în acea vecinătate. Cum M este un punct de ordinul 2, acest sistem local de coordonate poate fi ales astfel ca funcția G în noile coordonate să

devină o funcție omogenă P de variabilele ξ_1 și ξ_2 și ne-am redus astfel la cercetarea funcționalelor

$$\int_{P>0} \ldots \int P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\, \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{2}$$

unde $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Punem:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \int \ldots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_3 \ldots d\xi_n. \tag{3}$$

Atunci, integrala (2) devine

$$\int_{P>0} \int P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{4}$$

unde $P(\xi_1, \xi_2)$ este o funcție omogenă de două variabile, de grad m, iar $\psi(\xi_1, \xi_2)$ o funcție test cu suportul conținut într-o vecinătate suficient de mică a originii.

Așadar, după cum studiul lui G^λ într-o vecinătate a punctelor de ordinul 1 se reduce la studiul funcțiilor omogene de o variabilă, tot așa studiul lui G^λ în vecinătatea unui punct de ordinul 2 se reduce la studiul funcțiilor omogene oarecare de două variabile.

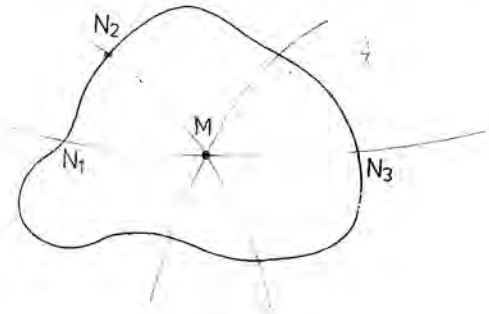

Fig. 7

Un punct reductibil de ordinul 2 al curbei $P(\xi_1, \xi_2) = 0$ este un punct singular izolat al curbei sau un punct în care se intersectează mai multe ramuri cu tangente diferite (fig. 7).

Pentru a studia integrala (4) pentru acele valori λ în care convergența este asigurată, vom trece la coordonate polare (r, u)* și utilizînd omogenitatea vom scrie integrala

$$(G^\lambda, \varphi) = \iint\limits_{F>0} P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

sub forma

$$(5) \qquad (G^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty r^{\lambda m+1}\, dr \int P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, du,$$

în care $\xi_1 = r\tilde{\xi}_1$, $\xi_2 = r\tilde{\xi}_2$, $\xi_k = \tilde{\xi}_k(u)$ sînt coordonatele unui punct pe curba $r = \text{const}$.

Să considerăm acum o funcțională ajutătoare, depinzînd de doi parametri independenți λ și μ:

$$(6) \qquad I_{\lambda,\mu}[\psi] = \int r^\mu\, dr \int P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, du.$$

Este evident că pentru $\mu = \lambda m + 1$ integrala (6) se reduce la (5), și este deci suficient de cercetat $I_{\lambda,\mu}[\psi]$. Are loc următoarea lemă:

Fie dată o funcție meromorfă de două variabile $F(\lambda, \mu)$ și două șiruri de numere

$$(7) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

$$(8) \qquad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots,$$

Să presupunem că $F(\lambda, \mu)$, pentru orice $\mu \neq \mu_n$, considerată ca funcție de λ are poli simpli în punctele șirului (7), iar în dezvoltarea Laurent în vecinătatea unui astfel de punct,

$$F(\lambda, \mu) = \frac{c_{-1}(\mu)}{\lambda - \lambda_n} + c_0(\mu) + c_1(\mu)\,(\lambda - \lambda_n) + \ldots,$$

coeficienții $c_{-1}(\mu)$, $c_0(\mu)$, ... sînt funcții meromorfe de μ, avînd poli simpli în punctele șirului (8). Atunci funcția analitică $F(\lambda, \lambda)$ are

* În locul coordonatelor polare se poate alege orice alt sistem de cooronate curbilinii pentru care curbele $r = \text{const}$. înconjoară originea.

poli în punctele ambelor șiruri (7) și (8). Dacă o valoare λ_0 aparține simultan ambelor șiruri, atunci pentru $\lambda = \lambda_0$ funcția $F(\lambda, \lambda)$ are un pol de ordinul 2 cu coeficientul lui $\dfrac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2}$ din dezvoltarea Laurent egal cu reziduul pentru $\mu = \lambda$ al coeficientului $c_{-1}(\mu)$.

Demonstrația rezultă direct din dezvoltarea funcției $F(\lambda, \mu)$ în serie Laurent în două variabile în vecinătatea punctului (λ_n, μ_m).

Să găsim acum polii funcției de două variabile complexe date de integrala (6). Să notăm cu $f_\lambda(r)$ integrala în raport cu du, adică

$$(9) \qquad f_\lambda(r) = \int\limits_\Gamma P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, du$$

(cu Γ s-a notat acea parte a curbei $r = 1$ pe care $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) > 0$). Punctele singulare în raport cu λ ale funcției $f(r)$ pot fi generate doar de acele puncte $N_1, N_2, \ldots$ de pe curbă în care $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ se anulează. Dar aceste puncte ale curbei $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = 0$ sînt reductibile pe conturul de integrare Γ*). Fie N_i unul dintre aceste puncte.

Reductibilitatea sa pe curba Γ înseamnă pur și simplu că în vecinătatea lui N_i pe Γ se poate introduce o coordonată locală ξ în care P este omogenă și deci este de forma ξ^{l_i}.

Presupunînd că funcția ψ este diferită de zero doar în vecinătatea punctului N_i am redus studiul singularităților lui $f_\lambda(r)$ la cel al singularităților integralelor $\int \xi^{\lambda l}\, \psi_1(r, \xi)\, d\xi$, unde $\psi_1(r, \xi) = \psi(\xi_1, \xi_2)$.

Dar singularitățile acestor integrale sînt bine cunoscute din cap. I, § 3. Anume, o astfel de integrală are poli simpli în punctele

$$\lambda = -\frac{1}{l_i}, -\frac{2}{l_i}, \ldots, -\frac{k}{l_i}, \ldots$$

Așadar, am obținut că integrala (9) adică funcția $f_\lambda(r)$ are pol simpli în punctele șirului

$$(10) \qquad \lambda = -\frac{1}{l_i}, -\frac{2}{l_i}, \ldots, -\frac{k}{l_i}, \ldots$$

* Se poate demonstra că dacă suprafața $F(x) = 0$ este reductibilă într-un spațiu n dimensional, dar $F(x)$ depinzînd de exemplu, doar de primele două coordonate x_1, x_2, atunci în planul (x_1, x_2) curba $F(x) = 0$ este de asemenea reductibilă.

unde l_i este gradul punctului N_i de ordin zero, incident punctului M, adică, în plan, gradul lui N_i pe ramurile de curbă ce trec prin punctul M.

Funcția de două variabile complexe (6) se scrie cu ajutorul funcției considerate $f_\lambda(r)$ în modul următor:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi]=\int_0^\infty r^\mu f_\lambda(r)\,dr. \tag{11}$$

Aplicînd din nou integralei (11) rezultatele § 3, cap. I, obținem că $I_{\lambda,\mu}[\psi]$ pentru un λ fixat ce nu aparține nici uneia din șirurile (10) se prelungește analitic în întreg planul variabilei μ cu excepția punctelor

$$\mu=-1,\ -2,\ \ldots,-k-1,\ \ldots,$$

în care această funcție are poli simpli. Punînd $\mu=\lambda m+1$, și aplicînd lema, obținem de aici că integrala

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1}\,dr\int P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\,\psi(\xi_1,\xi_2)\,du=I_{\lambda;m\lambda+1}[\psi]$$

are poli în punctele șirului (10):

$$\lambda=-\frac{1}{l_i},\ -\frac{2}{l_i},\ \ldots,\ -\frac{k+1}{l_i},\ \ldots$$

și în punctele șirului

$$\lambda=-\frac{2}{m},\ -\frac{3}{m},\ \ldots,\ -\frac{k+2}{m},\ \ldots \tag{12}$$

Dacă $\lambda=\lambda_0$ aparține simultan șirului (12) și unuia dintre șirurile (10), atunci în punctul $\lambda=\lambda_0$ integral considerată va avea în general un pol de ordinul 2.

Cum în coordonate locale avem

$$\int\cdots\int_{G>0}G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\int\int_{P>0}P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\,\psi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=$$

$$=\int_0^\infty r^{\lambda m+1}\,dr\int P^\lambda\left(\frac{\xi_1}{r},\ \frac{\xi_2}{r}\right)\psi(\xi_1,\xi_2)\,du,$$

teorema formulată la începutul acestui punct este demonstrată.

Să calculăm reziduurile distribuției $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ în polurile sale simple.

Fie pentru început $\lambda_0=-\frac{k+1}{l_i}$ un pol al lui $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ generat de anularea funcției $G(x_1,\ldots,x_n)$ în punctele de ordinul 1. Am văzut mai înainte, în § 4.2, că reziduul lui (G^λ,φ) într-un astfel de pol este integrala $\frac{1}{k!}\int\omega_k(\varphi)$, $\omega_k(\varphi)$ fiind forme diferențiale în vecinătatea oricărui punct de ordinul 1 al suprafeței $G(x_1,\ldots,x_n)=0$. Dacă acea parte de suprafață pe care se integrează $\omega_k(\varphi)$ este bordată de puncte de ordinul 2 ale suprafeței $G(x_1,\ldots,x_n)=0$, $\int\omega_k(\varphi)$ poate să fie divergentă. Reziduul este egal în acest caz regularizarea integralei corespunzătoare *).

Să considerăm acum polul simplu $\lambda_0=-\frac{k+2}{m}$ al distribuției $G(x_1,\ldots,x_n)$ generat de anularea în punctele de ordinul 2 a funcției $G(x_1,\ldots,x_n)$. Reprezentăm integrala

$$\int\cdots\int_{G>0}G^\lambda(x_1,\ldots x_n)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

în vecinătatea unui punct de ordinul 2

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1}f_\lambda(r)\,dr,\ \text{unde}\ f_\lambda(r)=\int_\Gamma P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\,\psi(r\xi_1,r\xi_2)\,du,$$

$P(\xi_1,\xi_2)$ — valoarea funcției $G(x_1,\ldots,x_n)$, în coordonate locale,

$$\psi(\xi_1,\xi_2)=\int\cdots\int\varphi_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,D\begin{pmatrix}x_1\ldots x_n\\ \xi_1\ \ldots\ \xi_n\end{pmatrix}d\xi_3\ldots d\xi_n,$$

iar $\varphi_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)\equiv\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Pentru acele valori ale lui λ pentru care integrala diverge, funcția $f_\lambda(r)$ este egală cu regularizata inte-

* Polul considerat λ_0 fiind simplu, există

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\int\cdots\int_{G>0}G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Regularizata lui $\frac{1}{k!}\int\omega_k(\varphi)$ se poate defini, de exemplu, ca fiind egală cu această limită.

gralei (obținută prin prelungirea analitică în raport cu λ a funcției $f_\lambda(r)$ plecînd de la valorile pozitive ale lui λ).

Reziduul integralei $\int_0^\infty r^{\lambda m+1} f_\lambda(r)\,dr$ pentru $\lambda = \lambda_0 = -\dfrac{k+2}{m}$ este egal cu

$$\frac{(-1^k) f_{\lambda_0}^{(k)}(0)}{k!}.$$

Derivăm funcția $f_{\lambda_0}(r)$ în raport cu r sub semnul integral (aceasta este permis pentru λ pozitivi, și prin urmare admis și pentru regularizata integralei) și facem $r=0$. Obținem atunci următoarea expresie

$$\frac{1}{k!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^k \psi(0,0)}{\partial\xi_1^\alpha \partial\xi_2^\beta}\int_\Gamma \tilde{\xi}_1^\alpha\,\tilde{\xi}_2^\beta\,P^{\frac{-k+2}{m}}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2)\,du =$$

(13)

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^k\psi(0,0)}{\partial\xi_1^\alpha\partial\xi_2^\beta}\int_\Gamma \frac{\xi_1^\alpha\,\xi_2^\beta(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)}{P^{\frac{k+2}{m}}(\xi_1,\xi_2)}$$

pentru reziduul distribuției $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ în punctul $\lambda_0=-\dfrac{k+2}{m}$.

În § 1, am obținut formula pentru reziduurile distribuției f^λ, f fiind omogenă, pozitivă de ordinul 1 (v. formula (8) § 1.3). Comparînd expresia obținută cu cea finală vedem că reziduul distribuției $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ se exprimă, în coordonate locale, analog reziduului unei funcții omogene pozitive, cu deosebire că integrala pe curba Γ este înțeleasă ca fiind regularizată integralei (pentru funcții, pozitive în vecinătatea punctelor de ordinul 2, aceasta integrală converge întotdeauna).

4.4. Distribuția $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ în cazul general. Să trecem la distribuția $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$, suprafața $G(x,\ldots,x_n)=0$ constînd din puncte reductibile de orice ordin de la 1 la n inclusiv.

Să presupunem, pentru a simplifica, că $G(x_1,\ldots,x_n)$ este un polinom. Vom demostra următoarea teoremă:

Distribuția $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ definită de egalitatea

$$(G^\lambda,\varphi)=\int_{G>0}\ldots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

pentru $Re\lambda>0$ și ca prelungirea analitică a acestei integrale pentru ceilalți λ, este o funcție meromorfă de λ, ai cărei poli sînt plasați într-un număr de progresii aritmetice. Fiecărei componente conexe a suprafeței $G_1(x,\ldots,x_n)=0$ constînd din puncte de ordin r și grad m (v. § 4.1) îi corespunde o mulțime de poli ai funcționalei $G^\lambda[\varphi]$ situați în punctele

$$\lambda=-\frac{r}{m},\ -\frac{r+1}{m},\ \ldots,\ \frac{r+k}{m},\ \ldots \tag{1}$$

În plus, dacă avem două, trei ș.a.m.d. componente conexe ale suprafeței $G=0$, formate din puncte de ordine diferite, incidente două cîte două și dacă $\lambda=\lambda_0$ aparține la două, trei etc. dintre șirurile (1) corespunzînd componentelor respective, atunci, pentru $\lambda=\lambda_0$ distribuția $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ are un pol de ordin 2, 3, etc.

Să presupunem că cunoaștem deja polii lui

$$\int_{G>0}\ldots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{2}$$

provenind din punctele de ordin inferior lui n. Este atunci suficient de a studia integrala (2) într-o vecinătate oricît de mică a unui punct M de ordinul n.

Să introducem în această vecinătate un sistem local de coordonate în care $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)=G(x_1,\ldots,x_n)$ este o funcție omogenă de grad m, și să presupunem că $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ în afara acestei vecinătăți. Integrala (2) se reduce atunci la integrala

$$I_\lambda[\psi]=\int_D\ldots\int P^\lambda(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n, \tag{3}$$

în care $\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\equiv\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,D\begin{pmatrix}\xi_1\ldots x_n\\ \xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}$, iar D este intersecția vecinătății pe care $\varphi_1\neq 0$ cu domeniul $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)>0$.

Pentru acei λ pentru care integrala (3) converge, trecem la coordonate polare. Din omogenitatea lui $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ rezultă că

$$I_\lambda[\varphi]=\int_0^\infty r^{\lambda m+n-1}\,dr\int_\Gamma P^\lambda(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,d\Omega, \tag{4}$$

domeniul Γ fiind intersecția sferei unitate cu domeniul $P(\xi_1, \ldots, \xi_n) > 0$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — punctul de pe Γ, $\xi_k = r\xi_k$, $d\Omega$ — elementul de arie al sferei unitate.

Integrala pe Γ este integrala pe sfera $(n-1)$ dimensională pe care suprafața $P(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, conform ipotezei, are doar puncte reductibile și de ordin cel mult $(n-1)$.

Conform ipotezei cunoaștem de asemenea polii acestei integrale precum și multiplicitățile respective.

Introducînd iarăși, ca în § 4.3 o funcțională depinzînd de doi parametri complecși

$$I_{\lambda,\mu}[\psi_1] = \int r^{\mu}\, dr \int_{\Gamma} P^{\lambda}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \psi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\Omega, \tag{5}$$

și notînd integrala pe Γ cu $f_\lambda(r)$:

$$f_{\lambda}(r) = \int_{\Gamma} P^{\lambda}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\Omega, \tag{6}$$

ne-am redus la situația considerată în § 4.3. Anume, pentru μ fixat, $\lambda \neq -n$, funcționala $I_{\lambda,\mu}[\psi_1]$ are poli în raport cu λ situați într-un număr finit de șiruri, iar pentru λ fixat, neaparținînd nici unuia dintre aceste șiruri $I_{\lambda,\mu}[\varphi_1]$ au poli pentru $\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$. Singura deosebire față de cazul considerat în § 4.3, cînd suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ consta din puncte de ordin cel mult 2, este că datorită inducției, polii în raport cu λ pot fi și multipli.

Este ușor de arătat că lema formulată în § 4.3 se extinde și la acest caz. Punînd $\mu = \lambda m + n + 1$ obținem că integrala

$$\int_0^{\infty} r^{\lambda m + n - 1}\, dr \int_{\Gamma} P^{\lambda}\left(\frac{\xi_1}{r}, \frac{\xi_2}{r}, \ldots, \frac{\xi_n}{r}\right) \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\Omega =$$

$$= \int \cdots \int_{D} P^{\lambda}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= \int \cdots \int_{G>0} G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

în afara polilor în raport cu λ ai funcției $f_\lambda(r)$ (generate de punctele suprafeței $G(x_1, \ldots, x) = 0$ avînd ordine inferioare lui n) mai are

poli și în punctele șirului

$$\lambda = -\frac{n}{m}, \quad -\frac{n+1}{m}, \ldots, -\frac{n+k}{m}, \ldots \tag{7}$$

Dacă în plus în punctul $\lambda = \lambda_0$ funcția $f_\lambda(r)$ are un pol de multiplicitate p și λ_0 aparține șirului (7), atunci distribuția $G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$ are în punctul $\lambda = \lambda_0$ un pol de multiplicitate $p+1$. Așadar, teorema noastră a fost demonstrată.

Am văzut deci pentru ce valori ale lui λ distribuția

$$\int \cdots \int_{G<0} G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

are poli.

În cazul cel mai simplu al unei funcții omogene nenegative G am văzut de asemenea în § 1, că din mai multe motive era natural de a introduce noțiunea de reziduu în origine al unei funcții formal omogene care caracterizează singularitatea acestei funcții în origine asemănător cu felul în care reziduul unei funcții analitice caracterizează punctul singular izolat respectiv.

Pentru o funcție oarecare $G(x_1, \ldots, x_n)$ cu singularități reductibile se pot defini analog reziduuri legate de funcția G.

Anume, dacă D este o componentă conexă maximală de ordin r și de grad m al varietății $G = 0$, atunci se numește reziduul funcției $G^{\frac{-r+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ relativ la această componentă, distribuția ce este reziduul funcției analitice de λ, $G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$ în punctul $\lambda = -\dfrac{r+k}{m}$.

În particular, dacă $G(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție omogenă de grad m, un astfel de reziduu al lui $G^{-(n+k)/m}(x_1, \ldots, x_n)$ în origine este egal cu o combinație liniară de derivate de ordin k al distribuției δ cu coeficienți integrale pe suprafețe închise ce înconjoară originea.

Dacă $G(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție oarecare avînd în origine un punct singular reductibil de ordin $(n-1)$ și de grad m, atunci reziduul funcției $G^{-(n+k)/m}(x_1, \ldots, x_n)$ relativ la acest punct va fi de asemenea egal cu o combinație liniară de derivate ale lui δ, de ordin cel mult k, cu coeficienți determinați de G. Se poate defini analog și reziduul relativ la orice componentă conexă a varietății $G = 0$ de ordin m și de grad r.

4.5. **Integralele unei funcții indefinit derivabile pe suprafețele de nivel** $G(x_1, \ldots, x_n) = c$. Să aplicăm rezultatele obținute la studiul

integralelor funcției $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pe suprafețele de nivel ale polinomului $G(x_1, \ldots, x_n)$. Ne vom mărgini la cazul în care suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ constă numai din puncte reductibile, iar suprafața $G=c$ pentru $c > 0$ nu are puncte singulare și vom considera integralele

$$I(c) = \int_{G=c} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\omega, \tag{1}$$

ω fiind forma definită pe suprafața $G(x_1, \ldots, x_n) = c$ de relația $dv = dG\omega$. Are loc identitatea evidentă (în raport cu λ)

$$\int_0^\infty I(c)c^\lambda \, dc = \int \cdots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Am stabilit mai înainte că integrala ce figurează în membrul drept (și prin urmare și cea din membrul stîng) este o funcție meromorfă de λ și am stabilit cum depind polii săi de singularitățile suprafeței $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Cum comportarea funcției $I(c)$ pentru $c > \varepsilon > 0$ nu influențează singularitățile integralei $\int_0^\infty I(c)c^\lambda \, dc$ atunci cunoscînd aceste singularități, putem scrie o dezvoltare asimptotică pentru funcția $I(c)$ pentru valori mici ale lui c.

Anume se poate arăta că dacă polii lui $F(\lambda)$, definită de integrala $\int_0^\infty I(c)\, c^\lambda \, dc$ și de prelungirea sa analitică sînt ordonați într-un șir descrescător

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_k, \ldots \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_k < \ldots)$$

și dacă notăm cu m_k multiplicitatea celei de al k-lea pol, atunci pentru c mici, $I(c)$ are următoarea dezvoltare asimptotică

$$I(c) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{k,m} c^{\lambda_k - 1} \ln^{m-1} c. \tag{3}$$

Este ușor de verificat că fiecare termen din membrul drept dă un pol de ordin m al integralei $\int_0^\infty I(c)c^\lambda dc$ (v. cap. I, § 3). Coeficientul $a_{k,m}$ este egal cu coefcientul lui $\dfrac{1}{(\lambda + \lambda_k)^m}$ în dezvoltarea Laurent a

lui $F(\lambda)$ în vecinătatea punctului $\lambda = -\lambda_k$, înmulțit cu $\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$.

Reamintindu-ne de definiția lui $\delta(G)$ putem rescrie integrala $I(c)$ sub forma

$$I(c) = \int_{G=0} \varphi\omega = (\delta(G - c),\ \varphi).$$

Rezultă de aici că avînd dezvoltarea asimptotică a lui $I(c)$ după puterile lui c, avem totodată și dezvoltarea lui $(\delta(G - c), \varphi)$ după puterile lui c. Se obține astfel din formula (3) dezvoltarea asimptotică a lui $\delta(G - c)$ pentru valori mici ale lui c.

Exemple. 1. Fie $G(x, y) = xy$. Atunci primul pol al distribuției $(xy)^\lambda$, definite de integrala $\iint_{xy>0} (xy)^\lambda \, \varphi(x, y)\, dx\, dy$ va fi $\lambda = -1$.

Dezvoltarea integralei $\iint_{xy>0} (xy)^\lambda \, \varphi(x, y)\, dx\, dy$ după puterile lui $\lambda + 1$ este de forma

$$\iint_{xy>0} (xy)^\lambda \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{2\,\varphi(0, 0)}{(\lambda + 1)^2} + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, 0)}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0, y)}{y}\, dy\right] \frac{1}{\lambda + 1} + \ldots$$

Integrala $I(c) = \int_{xy=c} \varphi(x, y)\omega$ * are deci următoarea dezvoltare asimptotică:

$$I(c) = -2\varphi(0, 0) \ln c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, 0)}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0, y)}{y}\, dy + \ldots,$$

unde termenii indicați prin puncte tind la zero pentru $c \to 0$.

* Cum s-a arătat mai înainte, se poate lua $\omega = \dfrac{dy}{y}$ sau $\omega = -\dfrac{dx}{x}$, adică considera integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)dy}{y} \quad \text{sau} \quad -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)\ dx}{x}.$$

Conform celor spuse mai înainte putem obține de aici dezvoltarea după puterile lui c ale distribuției $\delta(xy-c)$. Ea va fi de forma

$$\delta(xy-c) = -2\delta(x,\ y)\ln c + \left(\frac{\delta(y)}{x} + \frac{\delta(x)}{y}\right) + o(c). \tag{4}$$

2. $G = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. În acest caz integrala

$\iint\limits_{G>0} (x^2+y^2+z^2-t^2)\ \varphi(x,\ y,\ z,\ t)\ dv$ are pentru $\lambda = -1$ un pol simplu de reziduu $\delta(x^2+y^2+z^2-t^2)$ și pentru $\lambda = -2$ un pol de ordinul al doilea, în vecinătatea căruia această integrală are următoarea dezvoltare

$$\iint\limits_{G>0} G_\lambda \varphi\, dv + = \frac{1}{8}\frac{\varphi(0,0,0,0)}{(\lambda+2)^2} + \frac{1}{\lambda+2}\left\{\varphi(0,0,0,0)\ln 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{8\pi}{3}\left[\int\limits_0^1 \frac{\varphi(0,0) - \varphi(r,r)}{r}dr - \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(r,r)}{r}dr + \int\limits_0^\infty \frac{\partial\varphi(r,\ \rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r} dr\right]\right\} + \ldots$$

Putem deci reprezenta pe $\delta(G-c)$ sub forma

$$\delta(G-c) = \delta(G) + c\ln c\,\frac{\delta(x,y,z,t)}{8} + c\delta'(G) + \ldots, \tag{5}$$

unde $G \equiv x^2+y^2+z^2-t^2$.

Termenii indicați prin puncte sînt de forma $o(c)$, iar prin $\delta'(G)$ se înțelege integrala divergentă $\int\limits_{G=0} \omega_1$, regularizată așa cum indică parantezele de mai sus.

În general, dacă G este o funcție pentru care suprafața $G=0$ are doar singularități reductibile, atunci dezvoltarea distribuției $\delta(G-c)$ pentru c mici poate fi utilizată pentru a defini distribuțiile $\delta(G)$, $\delta'(G)$ ș.a.m.d. în acele cazuri în care integralele formelor diferențiale corespunzătoare diverg.

Anume, dacă

$$\delta(G-c) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m_k} T_{m,k}\, c^{\lambda_k - 1}\ln^{m-1} c,$$

unde $T_{k;m}$ sînt distribuții astfel ca

$$(T_{k;m},\ \varphi) = a_{k;m}$$

($a_{k,m}$ — coeficienții dezvoltării integralei $I(c) = \int\limits_{G=c}\varphi\omega$ după puterile lui c și $\ln c$ (v. formula (3)), atunci $\delta(G)$ va fi termenul liber al acestei dezvoltări, $\delta'(G)$ coeficientul cu semn schimbat al lui c, ș.a.m.d. În particular, formula (4) se rescrie sub forma

$$\delta(xy-c) = -2\ln c\,\delta(x,y) + \delta(x,y) + \ldots, \tag{4'}$$

astfel încît *

$$\delta(xy) = \frac{\delta(x)}{y} + \frac{\delta(y)}{x}. \tag{6}$$

În cazul în care suprafața $G=0$ nu are puncte singulare, o astfel de definiție coincide desigur cu cea dată mai înainte. Într-adevăr, în acest caz integrala $\int\limits_{G>0} G^\lambda \varphi dv$ are poli doar $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$, iar reziduul său pentru $\lambda = -k$ este egal cu $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(G)$, și deci

$$\delta(G-c) = \delta(G) - c\delta'(G) + \frac{c^2}{2}\delta''(G) + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(G) + \ldots$$

* Această formulă nu putea fi obținută în § 1 căci în deducerea formulei

$$\delta(PQ) = \frac{\delta(P)}{Q} + \frac{\delta(Q)}{P}, \qquad (*)$$

suprafețele $P=0$ și $Q=0$ nu se intersectau. Totuși, cînd ele se intersectează „transversal", adică atunci cînd se poate alege un sistem de coordonate, $u_1, \ldots, u_n$ cu $u_1 = P$, $u_2 = Q$, atunci (*) se deduce ușor din formula (6) utilizînd acest sistem de coordonate.

Din formula (4) se poate deduce un rezultat interesant. Derivînd egalitatea (4) în raport cu c:

$$-\delta'(xy - c) = -\frac{2}{c}\,\delta(x, y) + \dots$$

Înmulțind rezultatul cu $-c$ și făcînd pe $c \to 0$, obținem:

$$c\delta'(xy - c) \to 2\delta(x, y).$$

Analog, derivînd de două ori în raport cu c egalitatea (5)' înmulțind rezultatul obținut cu c și făcînd pe $c \to 0$, obținem:

$$c\delta''(x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - c) \to \frac{\delta(x, y, z, t)}{8}.$$

Aplicînd aceste formule unei funcții test φ putem calcula valoarea lui φ în origine cunoscînd integralele sale pe hiperbolele $xy = c$ sau pe hiperboloizii

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = c.$$

Rezumat al principalelor definiții și formule ale volumului I

Capitolul I, § 1

1. *Funcție test* — funcție indefinit derivabilă $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, cu suportul compact pe $\mathbf{R}^n$.

2. *Spațiul de bază* K — spațiul tuturor funcțiilor test. Operațiile liniare în K se definesc în mod uzual. Șirul $\varphi_\nu(x) \in K$ converge către zero dacă funcțiile $\varphi_\nu(x)$ converg către zero împreună cu derivatele de orice ordin, și au toate suportul conținut într-un același compact.

3. *Distribuție* — funcțională liniară continuă pe spațiul K.

4. *Distribuție regulată* — funcțională pe K de forma

$$(f, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$f(x)$ fiind o funcție local integrabilă.

5. Distribuțiile ce nu sînt regulate se numesc *singulare*.

6. $\theta(x)$-funcția egală cu 1 pentru $x > 0$ și cu 0 pentru $x < 0$ $(n = 1)$.

7. *Funcția delta* $\delta(x - x_0)$ este funcționala singulară definită de formula

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

8. Funcționala $f(x)$ *este nulă în domeniul* G, dacă $(f, \varphi) = 0$ pentru orice funcție test nulă pe un deschis G_1 cu proprietatea că G și G_1 acoperă întreg $\mathbf{R}^n$.

9. *Suportul* funcționalei f — mulțimea închisă pe complementara căreia funcționala f este nulă.

10. Șirul de distribuții f_ν *converge către distribuția* f, dacă pentru orice $\varphi \in K$

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

11. Pentru distribuții și funcții test cu valori complexe are loc regula

$$\alpha(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi) = (\overline{\alpha}f, \varphi).$$

Funcționala f de tip funcție $f(x)$ este definită de formula

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx.$$

12. Distribuția f, complex conjugată unei distribuții date f, se definește cu ajutorul formulei

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}.$$

13. Spațiul S constă din funcțiile indefinit derivabile $\varphi(x)$, verificînd inegalitățile

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \quad (k = 1,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

sau, în cazul mai multor variabile,

$$\left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1 + \ldots + q_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} \right| \leqslant C_{k_1 \ldots q_n}$$

$$(k_1, \ldots, q_n) = (0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

cu convergența corespunzătoare.

Capitolul I, § 2

1. Derivata distribuției f în raport cu x_j este definită de formula

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. $\theta'(x) = \delta(x)$.

3. $\dfrac{d}{dx} \ln (x + i0) = \dfrac{1}{x} - i\pi\, \delta(x)$,

unde $\left(\dfrac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x| > \varepsilon} \dfrac{\varphi(x)}{x}\, dx$.

4. $\Delta \dfrac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\, \Omega_n \delta(x)$, unde Ω_n este aria sferei unitate în spațiul n-dimensional $(n > 2)$.

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi\, \delta(x) \quad (n = 2).$$

5. Dacă șirul de distribuții f_ν are ca limită f, atunci șirul $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ are ca limită $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n)$.

8. $1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$.

9. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

10. $\dfrac{1}{\pi} \dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \to \delta(x)$, pentru $\varepsilon \to 0$.

11. $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x)$, pentru $t \to 0$.

12. $\dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin \nu x}{x} \to \delta(x)$, pentru $\nu \to \infty$.

Capitolul I, § 3

1. Distribuția x_+^λ este dată de următoarele formule: pentru $\operatorname{Re} \lambda > -1$

$$(1) \qquad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx;$$

pentru $\mathrm{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \right] dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)(\lambda+k)}; \tag{2}$$

pentru $-n-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -n$,

$$(x_+^\lambda, \varphi) =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \tag{3}$$

Această distribuție coincide pentru $x > 0$ cu funcția uzuală x^λ, iar pentru $x < 0$ este nulă. Ea este analitică pentru orice λ, cu excepția punctelor $\lambda = -1, -2, \ldots -n, \ldots$, în care are poli simpli.

Formula de derivare în raport cu x:

$$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq 1, -2, \ldots). \tag{4}$$

2. Distribuția x^λ este dată de formulele: pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$

$$(x^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx; \tag{5}$$

pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(x^\lambda, \varphi) =$$

$$= \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \right] dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)}; \tag{6}$$

pentru $-n-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -n$,

$$(x^\lambda, \varphi) =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(x-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \tag{7}$$

Această distribuție coincide pentru $x < 0$ cu $|x|^\lambda$; iar pentru $x > 0$ este nulă. Ea este analitică pentru orice λ, exceptînd $\lambda = -1, -2 \ldots \ldots, -n, \ldots$, în care are poli simpli.

Formula de derivare în raport cu x:

$$\frac{d}{dx} x^\lambda = -\lambda x^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{8}$$

3. Distribuția $|x|^\lambda$ este dată de formulele: pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$,

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^\infty |x|^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty x^\lambda [\varphi(x) + \varphi(-x)]\, dx; \tag{9}$$

pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > -2m-1$, $\lambda \neq -1, -3, \ldots, -2m+1$,

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda [\varphi(x) + \varphi(-x)]\, dx + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2-k)!(\lambda+2k+1)}; \tag{10}$$

Pentru $-2m-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -2m+1$,

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx. \tag{11}$$

Pentru $x \neq 0$ ea coincide cu funcția uzuală $|x|^\lambda$. Această distribuție are singularități (poli simpli) pentru $\lambda = -1, -3, \ldots, -2m-1, \ldots$ Pentru $\lambda = -2m$ scriem $|x|^{2-m} = x^{-2m}$ și

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \ldots \right.\right.$$

(12)

$$\left.\left. + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right]\right\} dx.$$

În particular,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \tag{13}$$

4. Distribuția $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ este dată de formulele: pentru $\operatorname{Re} \lambda > -2$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x \, \varphi(x) \, dx =$$

(14)

$$= \int_0^\infty x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(-x)] \, dx;$$

pentru $\operatorname{Re} \lambda > -2m - 2$, $\lambda \neq -2, -4, \ldots, -2m$,

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2 \left[x\varphi'(0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right]\right\} dx +$$

(15)

$$+ \int_1^\infty x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(-x)] \, dx + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k+1)! \, (\lambda + 2k + 2)};$$

pentru $-2m-2 < \operatorname{Re} \lambda < -2m$,

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2 \left[x\varphi'(0) + \right.\right.$$

(16)

$$\left.\left. + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)} \varphi^{(2m-1)}(0) \right]\right\} dx.$$

Ea coincide pentru $x \neq 0$ cu funcția uzuală $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$.
Această distribuție are singularități (poli simpli) pentru $\lambda = -2, -4, -2m, \ldots$ Pentru $\lambda = -2m-1$ scriem $|x|^{-2m-1} \operatorname{sgn} x = x^{-2m-1}$, și

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2 \left[x\varphi'(0) + \right.\right.$$

(17)

$$\left.\left. + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right]\right\} dx.$$

În particular,

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x} dx, \tag{18}$$

$$(x^{-3}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2x\varphi'(0)}{x_3} dx. \tag{19}$$

5. Integrala indefinită iterată de q-ori a lui $|x^\lambda|$ se poate scrie sub forma

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{q} |x|^\lambda \, dx =$$

(20)

$$= \frac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{q-2k}}{(2k-1)! \, (q-2k)!} \cdot \frac{1}{\lambda + 2k}.$$

6. Distribuțiile

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \tag{21}$$

sînt funcţii întregi de λ.

În particular, pentru $\lambda \to -n$

$$(22)\qquad \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to \delta_{(x)}^{(n-1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to (-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x);$$

pentru $\lambda \to -2m-1$,

$$(23)\qquad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m \delta^{(2m)}(x) m!}{(2m)!},$$

iar pentru $\lambda \to -2m$

$$(24)\qquad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m \delta^{(2m-1)}(x)(m-1)!}{(2m-1)!}$$

7. Distribuţiile $\ln(x+\mathrm{i}0)$ şi $\ln(x-\mathrm{i}0)$ se definesc prin formulele:

$$(25)\qquad \ln(x+\mathrm{i}0) = \lim_{y\to+0} \ln(x+\mathrm{i}y) = \ln|x| + \mathrm{i}\pi\theta(-x),$$

$$(26)\qquad \ln(x-\mathrm{i}0) = \lim_{y\to+0} \ln(x-\mathrm{i}y) = \ln|x| - \mathrm{i}\pi\,\theta(-x),$$

unde $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$.

8. Distribuţiile $(x+\mathrm{i}0)^\lambda$ şi $(x-\mathrm{i}0)^\lambda$ se definesc prin formulele:

$$(27)\qquad (x+\mathrm{i}0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+\mathrm{i}y)^\lambda = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}|x|^\lambda, & \text{pentru } x<0, \\ x^\lambda, & \text{pentru } x>0; \end{cases}$$

$$(28)\qquad (x-\mathrm{i}0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-\mathrm{i}y)^\lambda = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}|x|^\lambda, & \text{pentru } x<0, \\ x^\lambda, & \text{pentru } x>0. \end{cases}$$

Aceste funcţii există pentru orice λ complex şi definesc funcţionale regulate pentru $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Distribuţiile corespunzătoare se construiesc în modul următor: pentru $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$(29)\qquad (x+\mathrm{i}0)^\lambda = x_+^\lambda + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^\lambda,$$

$$(30)\qquad (x-\mathrm{i}0)^\lambda = x_+^\lambda + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^\lambda,$$

în care distribuţiile x_+^λ şi x_-^λ sînt definite de formulele (1)—(3) şi (5)—(7). Pentru $\lambda = -n$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$(31)\qquad (x+\mathrm{i}0)^{-n} = x^{-n} - \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),$$

$$(32)\qquad (x-\mathrm{i}0)^{-n} = x^{-n} + \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),$$

unde distribuţia x^{-n} este definită de formulele (12) sau (17). Astfel, distribuţiile $(x+\mathrm{i}0)^\lambda$ şi $(x-\mathrm{i}0)^\lambda$ sînt definite pentru toţi λ. Ele sînt funcţii întregi de λ.

Relaţiile

$$(x+\mathrm{i}0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+\mathrm{i}y)^\lambda,$$

$$(x-\mathrm{i}0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-\mathrm{i}y)^\lambda$$

au loc atît în sens uzual cît şi în sensul teoriei distribuţiilor.

Formule de derivare

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{i}0)^\lambda = \lambda(x+\mathrm{i}0)^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq 0) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\mathrm{i}0)^\lambda = \lambda(x-\mathrm{i}0)^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq 0) \end{cases}$$

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+\mathrm{i}0) = \dfrac{1}{x-\mathrm{i}0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x-\mathrm{i}0) = \dfrac{1}{x-\mathrm{i}0} \end{cases}$$

9. Distribuţia r^λ este dată, pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n$ de formulele

$$(35)\qquad (r^\lambda, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} r^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\,\mathrm{d}r,$$

în care Ω_n este aria sferei unitate în spaţiul n-dimensional, $S_\varphi(r)$ este media funcţiei φ pe sfera de rază r.

Această distribuție se prelungește analitic în întreg planul λ cu excepția punctelor $\lambda = -n,\ -n-2,\ -n-4, \ldots$ în care are poli simpli.

10. Distribuția $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}$ este o funcție analitică de λ.

Pentru $\lambda = -n$ ea se reduce la $\delta(x)$ pentru, $\lambda = -n-2k$ la

$$\frac{(-1)^k \Delta^k \delta(x)}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{36}$$

11. Formula de descompunere a lui r^λ în unde plane:

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_\Omega \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots \omega_n x_n|^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)} \, d\omega = \frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}. \tag{37}$$

Cazuri particulare: pentru n impar

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)\, d\omega; \tag{38}$$

pentru n par,

$$\delta(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega, \tag{39}$$

și de asemenea pentru orice n,

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n - i0)^{-n} d\omega. \tag{40}$$

Capitolul I, § 4

1. Distribuția $x_+^\lambda \ln^m x_+ (\lambda \neq -1, -2, \ldots)$ este definită de următoarele formule: pentru Re $\lambda > -1$,

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \, \varphi(x)\, dx; \tag{1}$$

pentru Re $\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots -n$,

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \tag{2}$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x \, \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^m m!\, \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)^{m+1}};$$

Pentru $-n-1 < \text{Re}\ \lambda < -n$

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\right] dx. \tag{3}$$

2. Formula de derivare în raport cu λ:

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} x_+^\lambda = x_+^\lambda \ln^m x_+ \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{4}$$

Dezvoltarea funcției x_+^λ în serie Taylor în vecinătatea unui punct regulat λ_0,

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) x_+^{\lambda_0} \ln x_+ + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0} \ln^2 x_+ + \ldots \tag{5}$$

3. Distribuția x_+^{-n} este definită de formula

$$(x_+^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n+1)}(0)\, \theta(1-x)\right] dx. \tag{6}$$

Această distribuție coincide cu funcția x^{-n} pentru $x>0$ și este nulă pentru $x<0$. Ea nu este valoarea pentru $\lambda=-n$ a funcției x_+^λ definită mai înainte.

4. Distribuțiile $x_+^{-n}\ln^m x_+$ sînt date de formulele

$$(x_+^{-n}\ln^m x_+,\varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\ln^m x\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots$$

(7)

$$\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]dx.$$

5. În vecinătatea polului $\lambda=-n$ dezvoltarea Laurent a lui x_+^λ este de forma

$$x_+^\lambda=\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda+n}+x_+^{-n}+(\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ +$$

(8)

$$+\frac{1}{2}(\lambda+n)^2x_+^{-n}\ln^2x_+ +\ldots$$

6. Distribuția $x_-^\lambda\ln^m x_-(\lambda\neq-1,\ -2,\ldots)$ se definește prin următoarele formule: pentru $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$(x^\lambda\ln^m x_-,\varphi)=\int_\infty^0|x|^\lambda\ln^m|x|\ \varphi(x)\,dx=$$

(9)

$$=\int_0^\infty x^\lambda\ln^m x\ \varphi(-x)\,dx;$$

pentru $\operatorname{Re}\lambda>-n-1,\ \lambda\neq-1,\ -2,\ldots,-n,$

$$(x_-^\lambda\ln x_-^m,\varphi)=\int_0^1 x^\lambda\ln^m x\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots$$

(10)

$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx+\int_1^\infty x^\lambda\ln^m x\varphi(-x)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+k-1}m!\ \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\ (\lambda+k)^{m+1}}.$$

Pentru $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n,$

$$(x_-^\lambda\ln x^m,\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\ln^m x\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots$$

(11)

$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx.$$

7. Formula de derivare în raport cu λ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}x_-^\lambda=x_-^\lambda\ln^m x_- \quad(\lambda\neq-1,-2,\ldots).\tag{12}$$

Dezvoltarea funcției x_-^λ în serie Taylor în vecinătatea unui punct regulat λ_0,

$$x_-^\lambda=x_-^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\,x_-^{\lambda_0}\ln x_-+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,x_-^{\lambda_0}\ln^2x_-+\ldots\tag{13}$$

8. Distribuția x_-^{-n} este definită de formula

$$(x^n,\varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots$$

(14)

$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]dx,$$

această distribuție coincide cu funcția uzuală $|x|^{-n}$ pentru $x<0$ și nulă pentru $x>0$. Dar ea nu este valoarea pentru $\lambda=-n$ a funcției analitice x_-^λ definită mai înainte.

9. Distribuțiile $x_-^{-n}\ln^m x_-$ sînt date de formulele

$$(x_-^{-n}\ln^m x_-,\varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\ln^m x\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots$$

(15)

$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]dx.$$

10. În vecinătatea polului $\lambda = -n$ dezvoltarea lui x_-^λ în serie Laurent este de forma

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{\lambda+n} + x^{-n} + (\lambda+n)\,x^{-n}\ln x_- +$$

(16)

$$+\frac{1}{2!}(\lambda+n)^2 x_-^{-n}\ln^2 x_- + \dots$$

11. Funcționala $|x|^\lambda \ln^k|x|$ se definește cu ajutorul unor formule asemănătoare formulelor (9)—(11) de la pag. 397—398, schimbînd peste tot pe x^λ prin $x^\lambda \ln^k x$.

În vecinătatea unui punct regulat λ_0, dezvoltarea lui $|x|^\lambda$ în serie Taylor este de forma

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x| + \frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\ln^2|x| + \dots \quad (17)$$

În vecinătatea polului $\lambda_0 = -2m-1$ dezvoltarea Laurent a lui $|x|^\lambda$ este

$$|x|^\lambda = \frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\cdot\frac{1}{\lambda+2m+1} + |x|^{-2m-1} +$$

(18)

$$+(\lambda+2m+1)\,|x|^{-2m-1}\ln|x| + \dots$$

unde, pentru $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$,

$$|x|^{-2m-1} = x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}; \quad (19)$$

$$|x|^{-2m-1}\ln^k|x| = x_+^{-2m-1}\ln^k x_+ + x_-^{-2m-1}\ln^k x. \quad (19a)$$

În particular,

$$(|x|^{-2m-1},\varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1}\left\{\varphi(x)+\varphi(-x) - 2\left[\varphi(0) +\right.\right.$$

(20)

$$\left.\left. + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\,\theta(1-x)\right]\right\}dx.$$

Distribuția $|x|^{-2m-1}$ coincide cu funcția uzuală $|x|^{-2m-1}$ pentru $x \neq 0$.

12. Distribuția $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x \ln^k|x|$ este definită de formule asemănătoare formulelor (14)—(16) de la pag. 402—403, schimbînd peste tot pe x^λ cu $x^\lambda \ln^\lambda x$.

În vecinătatea unui punct regulat λ_0 dezvoltarea Taylor a lui $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ este de forma

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^{\lambda_0}\operatorname{sgn} x + (\lambda-\lambda_0)\,|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sgn} x +$$

(21)

$$+\frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2\,|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \dots$$

În vecinătatea polului $\lambda_0 = -2m$ dezvoltarea lui $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ în serie Laurent este de forma

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} + |x|^{-2m}\operatorname{sgn} x +$$

(22)

$$+(\lambda+2m)\,|x|^{-2m}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \dots,$$

unde, pentru $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$

$$|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x = x_+^{-2m} - x_-^{-2m}; \quad (23)$$

$$|x|^{-2m}\ln^k|x|\operatorname{sgn} x = x_+^{-2m}\ln^k x_+ - x_-^{-2m}\ln^k x. \quad (23a)$$

În particular,

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x,\varphi) = \int_0^\infty x^{-2m}\left\{\varphi(x)-\varphi(-x) - 2\left[x\varphi'(0) +\right.\right.$$

(24)

$$\left.\left. + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\theta(1-x)\right]\right\}dx.$$

Subliniem că $|x|^{-2m-1}$ nu este valoarea lui $|x|^\lambda$ pentru $\lambda = -2m-1$ și că $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ nu este valoarea lui $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ pentru $\lambda = -2m$. Distribuția $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ coincide pentru $x \neq 0$ cu funcția uzuală $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$.

13. Derivatele în raport cu λ ale distribuțiilor $(x+\mathrm{i}0)^\lambda$ și $(x-\mathrm{i}0)^\lambda$ sînt notate

$$(x+\mathrm{i}0)^\lambda \ln(x+\mathrm{i}0), \text{ respectiv } (x-\mathrm{i}0)^\lambda \ln(x-\mathrm{i}0).$$

Ele sînt funcţii întregi de λ şi sînt date de formulele:

$$(x + i0)^\lambda \ln (x + i0) =$$

(25)

$$= \begin{cases} x_+ \ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- \text{ pentru } \lambda \neq -n, \\ (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln |x| \text{ pentru } \lambda = -n; \end{cases}$$

$$(x - i0)^\lambda \ln (x - i0)^\lambda =$$

(26)

$$= \begin{cases} x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- \text{ pentru } \lambda \neq -n, \\ (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + (-1)^n \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln |x| \text{ pentru } \lambda = -n. \end{cases}$$

14. În vecinătatea polului $\lambda = -n - 2k$ funcţia r^λ se dezvoltă în serie Laurent

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\lambda + n + 2k} + \Omega_n r^{-n-2k} +$$

(27)

$$+ \Omega_n (\lambda + n + 2k)\, r^{-n-2k} \ln r + \dots$$

Aici funcţionalele $\delta^{(2k)}(r)$, r^{-n-2k}, $r^{-n-2k} \ln^m r$ se aplică funcţiilor $S_\varphi(r)$ conform formulelor:

(28) $$(\delta^{(2k)}(r), S_\varphi(r)) = S_\varphi^{(2k)}(0),$$

$$(r^{-n-2k}, S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-2k-n} \Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \dots$$

(29)

$$\dots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\ \theta(1-r) \Big] dr,$$

$$(r^{-n-2k} \ln^m r, S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-2k-n} \ln^m r \Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \dots$$

(30)

$$\dots - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\ \theta(1-r) \Big] dr.$$

Numărul $S_\varphi^{(2k)}(0)$ se exprimă direct în raport cu funcţia $\varphi(x)$ şi a derivatelor acesteia, prin formula

(31) $$S_\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\, \Omega_n \Delta^n \varphi(0)}{2^k k!\, n(n+2) \dots (n+2k-2)}.$$

Capitolul I, § 5

1. *Produsul direct* $f(x) \times g(y)$ al funcţionalelor $f(x)$ şi $g(y)$ este acea funcţională pe spaţiul funcţiilor test $\varphi(x, y)$, definită de formula

$$(f(x) \times g(y),\ \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

2. *Convoluţia* $f(x) * g(x)$ a funcţionalelor f şi g este funcţionala definită pe spaţiul funcţiilor test $\varphi(x)$, de formula

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))).$$

Convoluţia este definită dacă este îndeplinită una din următoarele condiţii:

a) una dintre funcţionalele f, g are suportul compact.

b) Suporturile ambelor funcţionale sînt mărginite în aceeaşi parte.

Aceste condiţii fiind îndeplinite, convoluţia este comutativă şi asociativă.

3. $\delta * f = f$ pentru orice f.

4. $$\frac{\partial \delta}{\partial x_j} * f = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

5. $$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

6. Din $f_\nu \to f$ rezultă $f_\nu * g \to f * g$ în cazul îndeplinirii fiecăreia din condiţiile:

a) Toate funcţionalele f_ν sînt concentrate în acelaşi compact.

b) Funcţionala g are suportul compact.

c) Suporturile funcţionalelor f_ν şi g sînt mărginite în aceeaşi parte şi această margine nu depinde de indicele ν.

7. Soluție fundamentală a ecuației

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = g \tag{1}$$

este o distribuție $E(x)$, verificînd condiția

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E = \delta(x).$$

Soluția ecuației (1) poate fi exprimată cu ajutorul formulei

$$u = E * g,$$

în cazul în care există această convoluție. V. Cap. I, pct. 6.1—6.3, Cap. II, pct. 4.3, Cap. III, pct. 2.5.

8. *Soluție fundamentală a problemei Cauchy* pentru ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{2}$$

este o distribuție $E(x, t)$, depinzînd continuu de parametrul t care este pentru $t > 0$ o soluție a ecuației (2) și care pentru $t \to 0$ tinde către $\delta(x)$.

Soluția ecuației (2) cu condiția inițială $u(x, 0) = u_0(x)$ se poate reprezenta sub forma

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x),$$

în condițiile existenței acestei convoluții.

9. *Soluție fundamentală a problemei Cauchy* pentru ecuația

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = 0, \tag{3}$$

de ordinul m în raport cu t este acea distribuție $E(x, t)$, depinzînd continuu de parametrul t, care pentru $t > 0$ este o soluție a ecuației (3) și care verifică condițiile

$$\lim_{t\to 0} E(x, t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0, \ \ldots$$

$$\ldots, \lim_{t\to 0} \frac{\partial^{m-2} E(x, t)}{\partial t^{m-2}} = 0, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\partial^{m-1} E(x, t)}{\partial t^{m-1}} = \delta(x).$$

Soluția ecuației (3) cu condițiile inițiale

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

se poate reprezenta sub forma

$$u(x, t) = E(x, t) * u_{m-1}(x),$$

în condițiile în care această convoluție există. Vezi de asemenea Cap. I, pct. 6.4—6.5, Cap. II pct. 4.3, Cap. III, pct. 1.6.

10. *Integrala de ordin* λ a distribuției $g(x)$, nulă pentru $x < 0$ ($n = 1$) este definită de formula

$$g_\lambda(x) = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

Pentru $Re\ \lambda < 0$ această formulă definește *derivata* lui $g(x)$ de ordin $-\lambda$.

11. Funcția hipergeometrică

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt$$

verifică ecuația

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}\left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right],$$

sau

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right].$$

12. Funcția Bessel $J_\lambda(\sqrt{u})$ este legată de funcțiile elementare prin următoarea formulă de derivare fracționară

$$2^\lambda \sqrt{\pi}\, u^{\lambda/2} J_\lambda(\sqrt{u}) = \frac{d^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{du^{-\lambda-\frac{1}{2}}} \frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

Capitolul I, § 6

1. Soluția fundamentală a ecuației eliptice $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x) = \delta(x)$ se poate scrie sub forma

$$E(x) = \int_\Omega v_\omega(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n - n)\,d\Omega,$$

unde

$$(1)\qquad v_\omega(\xi,\lambda)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}G(\xi-\eta,\omega)\,|\eta|\,d\eta,$$

iar $G(\xi,\omega)$ este soluția ecuației

$$P\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)G(\xi,\omega)=\delta(\xi).$$

Pentru n impar expresia (1) se reduce la $(\xi=\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$

$$E(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}1,\ 3\ldots(n-2)}\int_\Omega\frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{\partial\xi^{n-1}}\,d\Omega.$$

2. Dacă $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ este un polinom omogen de $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de grad m, atunci $E(x)$ capătă forma

$$E(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}(2m-n)!}\int_\Omega|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{2m-n}\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}=$$

$$(2m>n,\ n\ \text{impar})$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n(2m-n)!}\int_\Omega\frac{(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{2m-n}\ln|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\,d\Omega=$$

$$(2m>n,\ n\ \text{par});$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Omega\delta^{(n-2m-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}=$$

$$(2m<n,\ n\ \text{impar});$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Omega\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{2m-n}}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\,d\Omega.$$

$$(2m<n,\ n\ \text{par}).$$

3. Formulele de mai înainte rămîn valabile și pentru operatorii omogeni $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ pentru care grad $P(\omega)$ nu se anulează pentru $P(\omega)=0$, $\omega\neq0$; dar integralele din aceste formule trebuie înțelese ca regularizate (în sensul valorii principale a lui Cauchy).

4. Soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$ este de forma

$$u(x,t)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_\Omega\left\{\int_{-\infty}^{\infty}G_\omega(t,\xi-\eta)\frac{|\eta|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Big|_{\lambda=-n}d\eta\right\}d\omega,$$

unde $G_\omega(t,\xi)$ este soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)u(t,\xi)=0.$$

În particular, pentru n impar

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}\int_\Omega\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G_\omega(t,\xi)\,d\Omega.$$

5. Dacă $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ este un polinom hiperbolic omogen de grad m, atunci $u(x,t)$ capătă forma

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!}\times$$

$$\times\int_{P(1,\xi)=0}(\Sigma x_k\xi_k+t)^{m-n-1}\operatorname{sgn}^{m-n-1}(\Sigma x_k\xi_k+t)\,d\omega=$$

$$(m>n-1,\ n\ \text{impar})$$

$$=\frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n(m-n-1)!}\int_{P(1,\xi)=0}(\Sigma x_k\xi_k+t)^{m-n-1}\ln\left|\frac{\Sigma x_k\xi_k+t}{\Sigma x_k\xi_k}\right|d\omega=$$

$$(m>n-1,\ n\ \text{par})$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\int_{P(1,\xi)=0}\delta^{(n-m)}(\Sigma x_k\xi_k+t)\,d\omega=$$

$$(m<n-1,\ n\ \text{impar})$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n}\int_{P(1,\xi)=0}\frac{d\omega}{(\Sigma x_k\xi_k+t)^{n-m+1}}.$$

$$(m<n-1,\ n\ \text{par}).$$

Capitolul II

1. *Transformata Fourier a funcției test* $\varphi(x)$

$$\psi(s) = \int \varphi(x)\, e^{i(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)}\, dx_1 \ldots dx_n$$

este o funcție analitică întreagă în variabilele $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, s_n = \sigma_n + i\tau_n$; ea verifică inegalitățile

$$|s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}\, \psi(s_1, \ldots, s_n)| \leqslant c_p e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|},$$

unde $\{|x_j| \leqslant a_j\}$ este domeniul în afara căruia funcția test $\varphi(x)$ se anulează identic.

2. Mulțimea tuturor funcțiilor $\psi(s)$ de tipul arătat se numește *spațiul Z*. Un șir $\psi_\nu(s) \in Z$ converge către 0 în Z dacă imaginile Fourier inverse $\varphi_\nu(x) \in K$ converg către 0 în K.

3. Transformata Fourier a unei distribuții f, adică a unei funcționale definite pe spațiul K este funcționala $g = F(f)$ definită pe spațiul Z prin formula

$$(g, \psi) = (2\pi)^n (f, \varphi),$$

unde $\psi(s) \in Z$ este transformata Fourier a funcției test $\varphi(x) \in K$.

4. Formulele ce dau transformatele Fourier ale derivării și înmulțirii cu variabila independentă:

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\right] = P(-is) F[f],$$

$$F[P(x) f] = P\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right) F[f].$$

5. Transformata Fourier a produsului direct

$$F[f \times g] = F[f] \times F[g].$$

6. Transformata Fourier a unei funcționale cu suport compact este o funcțională de tip funcție

$$F[f] = (\overline{f(x)}, e^{i(x, s)}) = (\overline{f(x)}, e^{-i(x, s)}).$$

7. $F[S] = S$.

8. Dacă $u(x, t)$ este soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația $\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$, atunci

$$E(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{pentru } t > 0, \\ 0 & \text{pentru } t < 0 \end{cases}$$

verifică ecuația

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) = \delta(x, t).$$

9. Transformatele Fourier ale diferitelor distribuții concrete sînt date într-un tabel separat (pag. 432—441)

Capitolul III, § 1

1. *Forma lui Leray* ω pe suprafața $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ este definită de relația

$$dP \cdot \omega = dx_1 \ldots dx_n;$$

în punctele în care $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$ ea se poate reprezenta sub forma

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x}}$$

2. Funcționala $\delta(P)$ este definită de formula

$$(\delta(P), \varphi) = \int_{P=0} \varphi(x)\omega.$$

3. $\theta(P)$ este funcția caracteristică a mulțimii $P(x) > 0$. Are loc formula de derivare

$$\theta'(P) = \delta(P),$$

cu alte cuvinte,

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j}\, \delta(P).$$

4. Formele $\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots$ sînt date de relaţiile:

$$\omega_0(\varphi) = \varphi \cdot \omega,$$

$$d\omega_0(\varphi) = dP \cdot \omega_1(\varphi),$$

.....

$$d\omega_{k-1}(\varphi) = dP \cdot \omega_k(\varphi),$$

.....

Integrala formei $\omega_k(\varphi)$ pe suprafaţa $P = 0$ este definită unic.

5. Au loc egalităţile:

$$P\,\delta(P) = 0,$$

$$P\delta'(P) + \delta(P) = 0,$$

$$P\delta''(P) + 2\delta'(P) = 0,$$

.....

$$P\delta^{(k)}(P) + k\delta^{(k-1)}(P) = 0,$$

.....

6. Soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor $\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = 0$, pentru $n = 2k + 3$ este de forma

$$E(x, t) = \frac{(-1)^k}{2\pi^{k+1}}\,\delta^{(k)}(r^2 - t^2) \quad (r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

7. Dacă suprafeţele $P = 0$ şi $Q = 0$ nu au puncte comune, atunci

$$\delta(PQ) = P^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\delta(P).$$

8. Dacă $a(x)$ nu se anulează, atunci:

$$\delta(aP) = a^{-1}\delta(P),$$

.....

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-k+1}\delta^{(k)}(P),$$

.....

9. Pe suprafaţa $P_1 = P_2 = \ldots = P_k = 0$ forma lui Leray ω este definită de relaţia

$$dP_1 \ldots dP_k\omega = dx_1 \ldots dx_n.$$

În particular, dacă iacobianul $D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix} \neq 0$, se poate spune

$$\omega = \frac{dx_{k+1} \ldots dx_k}{D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix}}.$$

10. Distribuţia $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ este definită de formula

$$(\delta(P_1, \ldots, P_k),\ \varphi(x_1, \ldots, x_k)) = \int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0} \varphi \cdot \omega.$$

11. Forma $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j+1}, \ldots \alpha(k)}(\varphi)$ se defineşte pornind de la forma $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_k(k)}(\varphi)$ prin ecuaţia

$$d(dP_1 \ldots d\varphi_{j-1}dP_{j+1} \ldots dP_k\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_k}) =$$
$$= (-1)^{j-1}\,dP_1 \ldots dP_k\omega_{\alpha_1, \ldots \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_k}.$$

12. Distribuţia $\dfrac{\partial^m \delta(P_1 \ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ este definită de egalitatea

$$\left(\frac{\partial^m \delta(P_1 \ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}},\ \varphi\right) = (-1)^m \int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$$
$$(m = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k).$$

13. Au loc relaţiile

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\delta(P_1 \ldots P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \delta(P_1 \ldots P_k)}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial x_j},$$

$$P_i\delta(P_1 \ldots P_k) = 0,$$

$$P_iP_j\delta(P_1 \ldots P_k) = 0,$$

.....

$$P_1P_2 \ldots P_k\delta(P_1 \ldots P_k) = 0,$$

şi cele ce se obţin derivînd formal în raport cu $P_1 \ldots P_k$ aceste relaţii.

Capitolul III, § 2

1. *Notații*

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$

$$Q = s_1^2 + \ldots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \ldots - s_{p+q}^2,$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2},$$

$n = p + q$ — dimensiunea spațiului; $p, q > 0$.

2. *Definiția distribuțiilor* $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P_+)$, $\delta^{(k)}(P_-)$, P_+^λ P_-^λ, $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$, $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$.

2.1. Pentru $p > 1, q > 1$

$$(\delta_1^{(k)}(P)\,\varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\,\psi_1(u, v)\right)\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi) = \frac{(-1)^k}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(u^{\frac{p-2}{2}}\,\psi_1(u, v)\right)\Big|_{u=v} v^{\frac{q-2}{2}}\,dv,$$

unde s-a notat cu $\psi_1(u, v)$ integrala funcției φ pe suprafața $x_1^2 + \ldots + x_p^2 = u$, $x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 = v$, divizată la $u^{\frac{p-1}{2}} v^{\frac{q-1}{2}}$.

Integralele de mai sus converg pentru $k < \frac{n}{2} - 1$; pentru $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$ ele trebuie înțelese ca regularizate, în conformitate cu Cap. I, § 3.

În mod analog se definesc $\delta_1^{(k)}(P)$ și $\delta_2^{(k)}(P)$ în cazurile excluse, $p = 1$ sau $q = 1$.

2.2. $$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_{P>0} P^\lambda \varphi\,dx_1 \ldots dx_n;$$

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{P<0} (-P)^\lambda \varphi\,dx_1 \ldots dx_n$$

Aceste integrale converg pentru $\mathrm{Re}\lambda > 0$ și sînt funcții analitice de λ; pentru $\mathrm{Re}\lambda < 0$ ele trebuie înțelese în sensul prelungirii analitice după λ.

2.3. $$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^{(k)} k!\operatorname*{Res}_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda,$$

$$\delta^{(k)}(P) = (-1)^k k!\operatorname*{Res}_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda.$$

2.4. $$(P + \mathrm{i}0)^\lambda = P_+^\lambda + \mathrm{e}^{\pi\lambda} P_-^\lambda,$$

$$(P - \mathrm{i}0)^\lambda = P_+^\lambda + \mathrm{e}^{\lambda} P_-^\lambda.$$

3. *Punctele singulare ale funcțiilor* P_+^λ, P_-^λ, $(P + \mathrm{i}0)^\lambda$, $(P - \mathrm{i}0)^\lambda$.

3.1. *p-par, q-impar.* Funcția P_+^λ are poli simpli în punctele $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots,$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P).$$

3.2. *p-impar, q-par.* Funcția P_-^λ are poli simpli în punctele $\lambda = -1, -2, \ldots, k, \ldots,$ și de asemenea și în punctele $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots -\frac{n}{2} - k, \ldots;$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-1} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P),$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.3. *p și q numere pare.* Funcția P_+^λ are poli simpli în punctele $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots;$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P), \quad \text{dacă} \quad k < \frac{n}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\,\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.4. *p și q numere impare.* Funcția P_+^λ are poli simpli în punctele $\lambda = -1, -2, -3, \ldots, -(n-1)$. În punctele $\lambda = \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1 \ldots,$ $-\frac{n}{2} - k$ această funcție are poli de ordinul 2.

Pentru $k < \frac{n}{2}$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P).$$

În vecinătatea lui $\lambda = -\frac{n}{2} - k,$

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)} + \ldots,$$

unde

$$c_{-2}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n)$$

și

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\,\delta^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\left[\psi\left(\frac{P}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right]}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta((x_1, \ldots, x_n).$$

3.5. La trecerea de la P_+^λ la P_-^λ trebuie schimbate în pct. 3.1 — — 3.4 valorile indicilor p și q și de asemenea trebuie înlocuiți L cu $-L$ și $\delta_1^{(k-1)}(P)$ cu $\delta_1^{(k-1)}(-P)$.

3.6. Funcțiile $(P + i0)^\lambda$ și $(P - i0)^\lambda$ au drept singure singularități doar poli simpli în punctele $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots -\frac{n}{2} - k,$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} (P + i0)^\lambda = \overline{\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} (P - i0)^\lambda} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

4. *Relațiile între distribuțiile* $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P)$ și $\delta^{(k)}(P_+)$

4.1. $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k\ \delta_2^{(k)}(P)$.

4.2. Dacă n este impar, și de asemenea dacă n este par și $k < \frac{n}{2} - 1$, atunci

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P) = \delta^{(k)}(P_+),$$

dacă n este par și $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, atunci

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c'_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1} \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta^{(k)}(P_+) = c'_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+k} \delta(x_1, \ldots, x_n),$$

unde $c_{p,q,k}$ și $c'_{p,q,k}$ sînt coeficienți numerici.

4.3. Dacă p și q sînt pare și $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, atunci

$$(-1)^k \delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}}\left(k+1-\frac{n}{2}\right)!} L^{k+1-\frac{n}{2}} \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

În toate celelalte cazuri

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k \delta^{(k)}(P_+).$$

5. *Soluția fundamentală K a ecuației diferențiale $L^k u = f(x)$.*
5.1. Dacă n este impar, atunci

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{2}{\pi} qi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} =$$

$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P_+^{-\frac{n}{2}+k} + e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i} P_-^{-\frac{n}{2}+k}),$$

$K_2 = \overline{K}_1$

5.2. Dacă n este par și $k < \frac{n}{2}$ atunci

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+v} =$$

$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} \left[P_+^{-\frac{n}{2}+k} + (-1)^{-\frac{n}{2}+k} P^{-\frac{n}{2}+k} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k} \pi i}{\left(\frac{n}{2} - k - 1\right)!} \delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+) \right],$$

unde $P_+^{-\frac{n}{2}+k}$ și $P_-^{-\frac{n}{2}+k}$ desemnează termenii liberi ai dezvoltării Laurent a funcțiilor P_+^λ, respectiv P_-^λ în vecinătatea punctului $\lambda = -\frac{n}{2} + k$;

$$K_2 = \overline{K}_1.$$

5.3. Dacă este par și $k \geqslant \frac{n}{2}$ atunci

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-k} \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}}{4^k \left(k - \frac{n}{2}\right)!\,(k-1)!} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P + i0)$$

$$K_2 = \overline{K}_1$$

6. Formulele § 3—5 rămîn valabile pentru orice formă pătratică nedegenerată

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

În acest caz,

$$L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta,$$

coeficienții $g^{\alpha\beta}$ sînt definiți de ecuațiile $\sum g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ ($\delta_\alpha^\gamma = 1$ pentru $\alpha = \gamma$, $\delta_\alpha^\gamma = 0$ pentru $\gamma \neq \alpha$).

În formulele de la punctul 3 trebuie adăugat ca factor în membrul drept $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, iar formulele de la punctul 5 analog $\sqrt{|\Delta|}$. Δ fiind discriminantul formei pătratice P.

7. Transformatele Fourier ale distribuțiilor descrise în punctele 1—6 sînt date în tabela separată a transformatelor Fourier.

Capitolul III, § 3

1. Distribuția $f(x_1, \ldots, x_n)$ se numește *omogenă de grad* λ, dacă pentru orice funcție test $\varphi(x)$ și $\alpha > 0$

$$\left((f, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f, \varphi).$$

2. Dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție pozitivă, continuă omogenă de gradul 1, atunci distribuția

$$(f^\lambda, \varphi) = \int f^\lambda \varphi \, dx,$$

definită de această integrală pentru $\mathrm{Re}\lambda > -n$, poate fi prelungită analitic în întreg planul λ cu excepția punctelor $\lambda = -n, -n-1, \ldots$ $\ldots, -n-k, \ldots$, unde au poli simpli. Prelungirea analitică f^λ în semiplanul $\mathrm{Re}\lambda > -n-k-1$ este dată de formula

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_G f^\lambda(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx +$$

$$+ \int_{R \setminus G} f^\lambda(x)\, \varphi(x) dx +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda}{m!(\lambda+n+m)} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \cdot \omega$$

G fiind un domeniu ce conține originea, Γ frontiera sa iar ω forma diferențială

$$x_1\, dx_2 \ldots dx_n - x_2\, dx_1\, dx_3 \ldots dx_n + \ldots + (-1)^{n+1} x_n\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

În banda $-n-k-1 < \mathrm{Re}\lambda < -n-k$ această formulă poate fi scrisă sub forma

$$(f^\lambda \varphi) =$$

$$= \int f^\lambda(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx.$$

Reziduul funcției f^λ în punctul $\lambda = -n-k$ este egal cu

$$\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} \frac{\partial^k \delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+k}(x)} \omega.$$

În particular, în punctul $\lambda = -n$ el este egal cu

$$\delta(x) \cdot \int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}.$$

3. Pentru o funcție oarecare formal omogenă $\Phi(x)$ de grad $-n$ și un domeniu G conținînd originea, se construiește distribuția

$$\Phi_{|G} = \int_G \Phi(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0)]0\, x + \int_{R \setminus G} \Phi(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

care coincide local cu $\Phi(x)$ peste tot, cu excepția originii. Această distribuție $\Phi|_G$ este omogenă de grad $-n$ atunci și numai atunci cînd

$$\int_\Gamma \Phi \cdot \omega = 0,$$

Γ fiind frontiera domeniului G iar ω forma diferențială indicată mai înainte.

4. Pentru o funcție oarecare $\Phi(x)$ formal omogenă de grad $-n-m$ în domeniul G ce conține originea se construiește distribuția

$$\Phi_{|G} = \int_G \Phi(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0) \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\Sigma x_1 = m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Big] dx +$$

$$+ \int_{R \setminus G} \Phi(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma x_j = m-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial \varphi^{m-1}(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] dx$$

ce coincide local cu $\Phi(x)$ peste tot cu excepția originii. Această distribuție este omogenă de grad $-n-m$ dacă și numai dacă are loc condiția

$$\int_\Gamma \Phi(x) x_1^{\alpha_1}, \ldots x_n^{\alpha_n}\, \omega = 0 \qquad \left(\sum \alpha_j = m\right).$$

5. Funcția omogenă Φ, de grad $-n+1$ poate fi derivată ca distribuție) în conformitate cu formula

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} G + (-1)^{j-1} \delta(x_1, \ldots, x_n) \int_\Gamma \Phi(x) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n$$

iar rezultatul nu depinde de alegerea domeniului G.

Capitolul III, § 4

1. Funcţia $G(x) = G(x_1, \ldots, x_n)$ se numeşte *echivalentă unei funcţii omogene în vecinătatea punctului* M, dacă în acea vecinătate există un sistem local de coordonate $\xi_1, \ldots, \xi_n$ în care funcţia $G(x)$ devine omogenă.

2. *Definirea inductivă a punctelor ireductibile.* Punctul x_0 pe axa reală se numeşte *reductibil* (relativ, la funcţia $G(x), G(x_0) = 0$) dacă $G(x)$ este echivalentă cu o funcţie omogenă în vecinătatea punctului x_0.

Punctul M pe suprafaţa $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se numeşte *reductibil* dacă într-o anumită vecinătate a punctului M, funcţia G este echivalentă cu o funcţie omogenă şi intersecţia suprafeţei $G = 0$ cu orice sferă suficient de mică, centrată în M dă o suprafaţă ale cărei puncte sînt toate reductibile pe acea sferă.

3. Dacă se pot alege coordonate locale în vecinătatea punctului M, astfel încît funcţia omogenă G de grad m să depindă de k variabile şi nu se pot alege astfel încît să depindă doar de $h - 1$ variabile, atunci punctul M se numeşte punct de ordin k şi grad m.

4. Presupunem că suprafaţa $G = 0$ constă numai din puncte reductibile. Funcţionala, definită de integrala convergentă pentru $\mathrm{Re}\lambda > 0$,

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx, \ldots, dx_n,$$

este o funcţie analitică de λ. Această funcţie analitică poate fi prelungită la întreg planul λ ca o funcţie meromorfă ai cărei poli se află pe un număr finit de progresii aritmetice. Anume, fiecărei componente conexe a suprafeţei $G = 0$, constînd din puncte de ordin r şi de grad m, îi corespunde o serie de poli în punctele $-\frac{r}{m}, -\frac{r+1}{m}, \ldots$ $\ldots, -\frac{r+k}{m}, \ldots$. Dacă există mai multe componente conexe scufundate unele în altele constînd din puncte de ordine diferite, şi dacă $\lambda = \lambda_0$ aparţine la mai multe serii corespunzînd acestor componente, atunci ordinul polului în punctul λ_0 creşte corespunzător.

În particular, dacă pe suprafaţa $G = 0$ nu sînt puncte singulare (adică puncte reductibile de ordinul 1 şi de grad 1), atunci polii funcţiei (G^λ, φ) epuizează seria $-1, -2, \ldots, -n$.

5. Presupunem că suprafaţa $G = 0$ constă doar din puncte reductibile, iar suprafaţa $G = c$, pentru $c > 0$ nu are puncte singulare. Fie apoi ω forma definită de relaţia $dG \cdot \omega = dv$. Pentru integrala

$$I(c) = \int_{G=c} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \omega = (\delta(G - c), \varphi)$$

are loc dezvoltarea asimptotică

$$I(c) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km} c^{\lambda_k - 1} \ln^{m-1} c,$$

unde $0 > -\lambda_1 > -\lambda_2 > \ldots$ sînt polii funcţiei (G^λ, φ), m_k multiplicitatea polului λ_k, iar a_{km} este coeficientul lui $\frac{1}{(\lambda + \lambda_k)^m}$ în dezvoltarea Laurent a lui (G^λ, φ) în vecinătatea polului $-\lambda_k$, înmulţit cu $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$.

6. În particular,

$$\int_{xy=c} \varphi \cdot \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)}{y}\, dy = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)dx}{x} =$$

$$= -2\varphi(0, 0) \ln c + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, 0)}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0, y)}{y}\, dy + \ldots,$$

unde punctele înseamnă termeni ce tind la zero pentru $c \to 0$. Echivalent,

$$\delta(xy - c) = -2\delta(x, y) \ln c + \frac{\delta(y)}{x} + \frac{\delta(x)}{y} + 0(c).$$

7. Pentru $G = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$,

$$\delta(G - c) = \delta(G) + c \ln c \frac{\delta(x, y, z, t)}{8} + c\ \delta'(G) + o(c).$$

1. Funcţii de o variabilă

Nr.	Distribuţia f	Transformata Fourier $F[f]$
1	Funcţie integrabilă $f(x)$	$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\sigma x}\,dx$
2	$\delta(x)$	1
3	1	$2\pi\delta(\sigma)$
4	Polinom $P(x)$	$2\pi P\left(-i\frac{d}{d\sigma}\right)\delta(\sigma)$
5	$\delta^{(2m)}(x)$	$(-1)^m\sigma^{2m}$
6	$\delta^{(2m+1)}(x)$	$(-1)^{m+1}i\sigma^{2m+1}$
7	e^{bx}	$2\pi\delta(s-ib)$
8	$\sin bx$	$-i\pi([\delta(s+b)-\delta(s-b)]$
9	$\cos bx$	$\pi[\delta(s+b)+\delta(s-b)]$
10	$\mathrm{sh}\,bx$	$\pi[\delta(s-ib)-\delta(s+ib)$
11	$\mathrm{ch}\,bx$	$\pi[\delta(s-ib)+\delta(s+ib)]$
12	$e^{\frac{x^2}{2}}$	Funcţionala analitică $i\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{s^2}{2}}$ (integrarea pe axa imaginară)
13	$\lvert x\rvert^\lambda\ (\lambda\neq -1,-3,\ldots)$	$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}$
14	$f_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\,f_{-\lambda-1}(\sigma)=\sqrt{2\pi}\,\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$
15	$\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn}x$ $(\lambda\neq 2,-4\ldots)$	$2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$

Nr.	Distribuţia f	Transformata Fourier $F[f]$
16	$g_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn}x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\,i g_{-\lambda-1}(\sigma)=$ $=\sqrt{2\pi}\,i\,\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}$
17	x^m	$2(-i)^m\pi\delta^{(m)}(\sigma)$
18	x^{-m}	$i^m\frac{\pi}{(m-1)!}\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$
19	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn}\sigma$
20	x^{-2}	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
21	$x_+^\lambda\ (\lambda\neq -1,-2,\ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}=i\Gamma(\lambda+1)\times$ $\times[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}]$ *)
22	x_+^n	$i^{n+1}n!\,\sigma^{-n-1}+(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
23	$\theta(x)$	$i\sigma^{-1}+\pi\delta(\sigma)$
24	$x_-^\lambda\ (\lambda\neq -1,-2,\ldots)$	$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}=i\Gamma(\lambda+1)\times$ $\times e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}]$ *)
25	$(x+i0)^\lambda$	$\frac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_-^{-\lambda-1}$
26	$(x-i0)^\lambda$	$\frac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_+^{-\lambda-1}$

*) A doua pentru $\lambda\neq 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3\ldots$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$

În formulele 27–38 sînt utilizate următoarele notații:

$$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)=\frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(\lambda+n)+\ldots,$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)=\frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+b_0^{(n)}+b_1^{(n)}(\lambda+n)+\ldots,$$

$$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)=\frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+c_0^{(n)}+c_1^{(n)}(\lambda+n)+\ldots,$$

$$2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)=\frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+d_0^{(n)}+d_1^{(n)}(\lambda+n).$$

Coeficienții $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}$, ... au următoarele expresii

$$a_{-1}^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$a_0^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right];$$

$$a_1^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2}+\sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\,k\leqslant n-1}}\frac{1}{jk}-\frac{\pi^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1)+\Gamma''(1)+i\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)\right]\right\};$$

34	$\lvert x\rvert^{\lambda}\ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\right.$ $\left.-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\right\}+$ $+ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]\times\right.$ $\times(\sigma-i0)^{-\lambda-1}-$ $\left.-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\right\}$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
35	$x^{-2m}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}-c_0^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert$
36	$x^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$id_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}\operatorname{sgn}\sigma-id_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert\operatorname{sgn}\sigma$
37	$\lvert x\rvert^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}-c_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert+$ $+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln^2\lvert\sigma\rvert$
38	$\lvert x\rvert^{-2m}\ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$	$id_1^{(2m)}\sigma^{2m-1}-id_0^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert+$ $+\frac{i}{2}d_{-1}^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln^2\lvert\sigma\rvert$
39	$(1-x^2)_+^{\lambda}$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(\sigma)$
40	$(1+x^2)_+^{\lambda}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{\lvert\sigma\rvert}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)$
41	$(x^2-1)_+^{\lambda}$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$-\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)=$ $=\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}\times$ $\times\frac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)-J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}$
42	$(x^2-1)_+^{n}$	$(-1)^n2\pi\left(1+\frac{d^2}{d\sigma^2}\right)\delta(\sigma)+$ $+(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(\sigma)$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
	2. Funcții de mai multe variabile	
1	$\delta(x_1, \ldots, x_n)$	1
2	1	$(2\pi)^n\ \delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$
3	Polinomul $P(x_1, \ldots, x_n)$	$(2\pi)^n P\left(-i\frac{\partial}{\partial\sigma_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial\sigma_n}\right)\delta(\sigma)$
4	$r^\lambda\ (r = \sqrt{\Sigma x_j^2})$	$2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}\ (\rho = \sqrt{\Sigma\sigma_j^2})$
5	$f_\lambda(r) = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}} r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$	$f_{-\lambda-n}(\rho) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{2^{\frac{\lambda+n}{2}}\rho^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$

În formulele 6–9 se folosește funcția

$$C_\lambda = 2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{c_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda+n+2m} + c_0^{(n+2m)} + c_1^{(n+2m)}(\lambda+n+2m) + \ldots$$

În membru drept este scrisă dezvoltarea sa Laurent în vecinătatea punctului $= -n-2m$. Cu Ω_n s-a notat

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

aria sferei unitate în spațiul n-dimensional

6	$r^\lambda \ln r$ $(\lambda \neq -n, -n-2, \ldots)$	$\frac{dC_\lambda}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n} + C_\lambda\rho^{-\lambda-n}\ln\rho$
7	$r^\lambda \ln^2 r$ $(\lambda \neq -n-n, -2, \ldots)$	$\frac{\partial^2 C_\lambda}{\partial\lambda^2}\rho^{-\lambda-n} + 2\frac{dC_\lambda}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n}\ln\rho + C_\nu\rho^{-\lambda-n}\ln^2\rho$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
8	$\Omega_n r^{-2n-m}$	$c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho + c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}$
9	$\Omega_n r^{-2n-m}\ln r$	$\frac{1}{2}c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln^2\rho + c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho + c_1^{(n+2m)}\rho^{2m}$
10	$\delta(r-a)\ (n \geq 1)$	$\Omega_{n-1}a^{\frac{n}{2}-1}\rho J_{\frac{n}{2}-1}(a\rho)$
11	Ca pentru $n = 3$	$4\pi a\frac{\sin a\rho}{\rho}$
12	$\left(\frac{d}{ada}\right)^m\frac{\delta(r-a)}{a}$	$\Omega_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\rho}{\rho}$

Pentru notațiile referitoare la formulele 13 – 25 vezi la rezumat pct. 1–2

13	$(P+i0)^\lambda$	$\frac{1}{\Gamma(-\lambda)}e^{-\frac{\pi}{2}qi}2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{n}\right)\times (Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
14	$(P-i0)^\lambda$	$\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
15	P_+^λ	$2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times \frac{1}{2i}\left[e^{-i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
16	P_-^{λ}	$-2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times$ $\times\frac{1}{2i}\left[e^{-\frac{\pi}{2}qi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{\pi}{2}qi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$
17	$(c^2+P+i0)^{\lambda}$	$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$ $=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\frac{\pi i}{2}\,\frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$
18	$(c^2+P-i0)^{\lambda}$	$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$ $=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi i}{2}\,\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
19	$\frac{(c^2+P)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$-\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\right.$ $\left.-e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}=$ $=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{-\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$ $+\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\times$ $\times\left[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$ $\left.\left.\left.+\sin\frac{p\pi}{2}\,\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
20	$\frac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$	$\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left\{e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{\sin\frac{q\pi}{2}\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_+^{\frac{1}{2}})}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\times\right.$ $\times\left[\sin\frac{q\pi}{2}\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$ $\left.\left.\left.+\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}(cQ_-^{\frac{1}{2}})}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}$
21	$\delta^{(s-1)}(c^2+P)$	$(-1)^{s+1}\frac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}2^{\frac{n}{2}-s}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}-s}\times$ $\times\left[e^{-\frac{\pi iq}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{\pi iq}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}\right].$

Nr.	Distribuția f	Transformata Fourier $F[f]$
22	$\delta(c^2+P)$	$-\frac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1}\left[-e^{-\frac{\pi qi}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}+\right.$ $\left.+e^{\frac{\pi qi}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}\right].$
23	$\frac{(c^2+P)_+^s}{\Gamma(s+1)}$	$(-1)^{s+1}i2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right]+$ $+(2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x),$
24	$\frac{(c^2+P)_-^s}{\Gamma(s+1)}$	$\frac{i\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right],$
25	$\frac{(c^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$	$(2\pi)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x)$

ANEXA 3

Am afirmat în cap. I (§ 1.8) că spaţiul distribuţiilor este complet în raport cu noţiunea de convergenţă introdusă; altfel spus, dacă şirul de funcţionale $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ are proprietatea că pentru orice funcţie test φ, există limita şirului numeric (f_ν, φ), atunci această limită $f(\varphi) = \lim_{\nu\to\infty} (f_\nu, \varphi)$ va fi şi ea o funcţională continuă în spaţiul K.

În această anexă afirmaţia de mai sus va fi demonstrată. Faptul că funcţionala $f(\varphi)$ este liniară este imediat:

$$f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \lim_{\nu\to\infty} \{f_\nu(\alpha_1\varphi_1) + f_\nu(\alpha_2\varphi_2)\} =$$

$$= \alpha_1 f(\varphi_1) + \alpha_2 f(\varphi_2).$$

Rămîne de arătat continuitatea funcţionalei $f(\varphi)$. Fie şirul de funcţii test φ_ν tinzînd către zero în spaţiul K; trebuie arătat că $f(\varphi_\nu)\to 0$.

Să presupunem contrariul. Atunci, eventual trecînd la un subşir, putem presupune că $|f(\varphi_\nu)| \geqslant c > 0$.

Convergenţa şirului φ_ν către zero în spaţiul K înseamnă că toate funcţiile $\varphi_\nu(x)$ sînt identic nule în afara unui compact şi tind uniform către zero în $\mathbf{R}^n$, la fel ca şi derivatele lor de orice ordin. Trecînd încă o dată la un subşir, putem presupune că $|D^k\varphi_\nu(x)| \leqslant \frac{1}{4^\nu}$ $(k = 0,1,\ldots,\nu)$.

Fie $\varphi_\nu = 2^\nu \psi_\nu$; atunci şi funcţiile ψ_ν vor tinde către zero în spaţiul K, iar $f(\psi_\nu) \to \infty$.

Vom construi acum un anume subşir f'_ν şi un anumit subşir ψ'_ν în modul următor.

Alegem la început ψ'_1 astfel ca $|f(\psi'_1)| > 1$. Pentru că $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$ alegem apoi f'_1 astfel ca $(f'_1, \psi'_1) > 1$.

Să presupunem f'_j, ψ'_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ deja aleşi. Drept ψ'_ν alegem un element din şirul ψ_ν cu indice suficient de mare încît să avem:

(a) $$|(f'_k, \psi'_\nu)| < \frac{1}{2^{\nu-k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1);$$

(b) $$|f(\psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} f(\psi'_j) + \nu.$$

Pentru prima condiţie o alegere este posibilă, căci funcţiile tind la zero în spaţiul K şi prin urmare pentru orice distribuţie f_0 avem $(f_0, \psi_\nu) \to 0$. A doua condiţie poate fi îndeplinită căci $f(\psi_\nu) \to \infty$. Cum $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$, alegem f'_ν din şirul f_ν astfel încît să avem

(b') $$|(f'_\nu, \psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f'_\nu, \psi'_j)| + \nu.$$

În acest mod putem repeta construcţia lui ψ'_ν şi f'_ν de oricîte ori. Punem:

$$\psi = \sum_{\nu+1}^{\infty} \psi'_\nu.$$

Prin construcţie, seria din membrul drept converge în spaţiul K şi, prin urmare, suma sa ψ va fi un element din K. Apoi

$$(f'_\nu, \psi) = \sum_{j=1}^{\nu-1} (f'_\nu, \psi'_j) + (f'_\nu, \psi'_\nu) + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j).$$

Dar din (b') şi

$$\sum_{j=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j) < \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = 1,$$

obţinem:

$$|(f'_\nu, \psi)| > \nu - 1,$$

adică, pentru $\nu \to \infty$, $(f'_\nu, \psi) \to \infty$. Dar aceasta contrazice relaţia $\lim_{\nu\to\infty} (f'_\nu, \psi) = f(\psi)$.

Rezultă prin urmare că $f(\varphi_\nu) \to 0$ şi astfel continuitatea funcţionalei f a fost demonstrată.

ANEXA 4

DISTRIBUȚII ÎN SPAȚIUL COMPLEX

§ 1. Distribuții de o variabilă complexă

1. *Variabilele* z și $\bar{z}$. Este adesea comod de a considera o funcție $f(x, y)$ ca funcție de o singură variabilă complexă $z = x + iy$. În acest caz se înlocuiesc operatorii de derivare $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ cu operatorii de derivare în raport cu z și $\bar{z}$: $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Acești operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ și $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sînt astfel definiți încît regulile uzuale de derivare a funcțiilor compuse să fie satisfăcute, deci să avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

și

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \cdot = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Deducem de aici că

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Să remarcăm faptul că operatorul lui Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se exprimă în operatorii $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, astfel

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Iată acum cîteva exemple de derivare în raport cu z și $\bar{z}$:

1) $\frac{\partial}{\partial z}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) = \bar{z}$. Analog $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z|^2 = z$.

2) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^n = 0$.

3) Fie $P(x, y)$ un polinom în x și y. Înlocuind $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, obținem polinomul $P(x, y)$ ca un polinom în z și $\bar{z}$: $P(x, y) = P_1(z, \bar{z})$. Se verifică ușor că derivarea polinomului $P_1(z, \bar{z})$ în raport cu z și $\bar{z}$ se face ca și cum z și $\bar{z}$ ar fi variabile independente. Atunci cînd se vor utiliza simbolurile z și $\bar{z}$, în loc de $f(x, y)$ se va scrie $f_1(z, \bar{z})$, înțelegînd prin aceasta că

$$f_1(z, \bar{z}) = f\left(\frac{1}{2}[z - \bar{z}], \left[\frac{z - \bar{z}}{2i}\right]\right). \tag{2}$$

Cu această notație, o funcție analitică se va nota $f(z)$. Aceasta pentru că condițiile Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ pentru funcția $f = u + iv$ se pot scrie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Analog, funcțiile antianalitice se definesc prin condiția $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Din acest motiv, este natural ca ele să fie notate $f(\bar{z})$*). (Remarcăm că, dacă f este analitică, atunci $\bar{f}$ este antianalitică).

Să scriem acum dezvoltarea MacLaurin în raport cu z și $\bar{z}$ a unei funcții indefinit derivabile arbitrare, $f(x, y) = f_1(z, \bar{z})$. Fie

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{\partial^{j+k} f(0, 0)}{\partial x^j \partial y^k}\frac{x^j}{j!}\frac{y^k}{k!}.$$

*) Vom păstra această convenție doar un timp, pînă cînd cititorul se va obișnui cu notația. Apoi, pentru a nu complica scrierea, vom nota cu $f(z)$ orice funcție (nu neapărat analitică) de z și $\bar{z}$.

Cum avem

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=z\frac{\partial}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

dezvoltarea MacLaurin în raport cu variabilele z, $\bar{z}$ este de forma (în care am scris f în loc de f_1)

$$(3)\quad f(z,\bar{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z\frac{\partial}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(0,0)=\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{f^{(j,k)}(0,0)}{j!\,k!}z^j\bar{z}^k,$$

în care s-a introdus notația

$$f^{(j,k)}(z,\bar{z})=\frac{\partial^{j+k}f(z,\bar{z})}{\partial z^j\partial\bar{z}^k}.$$

În particular, în cazul funcțiilor analitice această serie nu conține termeni în $\bar{z}$, iar pentru f antianalitică nu conține termeni în z.

Atunci cînd se *integrează* funcția $f(z,\bar{z})$ este mai comod de a considera în locul formei diferențiale $dxdy$ forma $dzd\bar{z}$. Această formă, se definește ca fiind produsul exterior al formelor $dz=dx+idy$ și $d\bar{z}=dx-idy$, adică

$$dz\,d\bar{z}=(dx+idy)(dx-idy)=-2i\,dx\,dy.$$

Prin urmare,

$$(4)\quad dx\,dy=\frac{i}{2}dz\,d\bar{z},$$

Pentru integrarea în planul complex este adevărată următoarea regulă de schimbare de variabilă.

Fie $z=\varphi(\zeta)$ o funcție analitică de ζ, aplicînd biunivoc domeniul D_ζ din planul ζ pe domeniul D_z din planul z. Atunci,

$$(5)\quad \frac{i}{2}\int_{D_z}f(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}=\frac{i}{2}\int_{D_\zeta}f[\varphi(\zeta),\bar{\varphi}(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^2\,d\zeta\,d\bar{\zeta}.$$

Într-adevăr, în acest caz $dz=\varphi'(\zeta)\,d\zeta$, $d\bar{z}=\bar{\varphi}'(\zeta)\,d\bar{\zeta}$.

De asemenea este ușor de a demonstra formula de integrare prin părți

$$(6)\quad \frac{i}{2}\int\varphi^{(j,k)}(z,\bar{z})f(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}=(-1)^{j+k}\frac{i}{2}\int\varphi(z,\bar{z})f^{(j,k)}(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z},$$

unde $\varphi(z,\bar{z})$ și $f(z,\bar{z})$ sînt funcții suficient de regulate, cu suport compact.

2. *Funcții omogene de variabilă complexă.* Fie λ și μ numere complexe arbitrare, a căror diferență să fie un număr întreg. Funcția $F(z,\bar{z})$ se numește *omogenă cu grad de omogenitate* (λ,μ), *dacă pentru orice număr complex* $a\neq 0$ *avem* : *)

$$(1)\quad F(az,\bar{a}\bar{z})=a^{\lambda}a^{-\mu}F(z,\bar{z}).$$

Am fi putut încerca să definim funcțiile omogene prin condiția mai generală,

$$(1')\quad F(az,\bar{a}\bar{z})=\alpha(a)\,F(z\,\bar{z}).$$

Dar din relația (1') rezultă că funcția $\alpha(a)$ trebuie să satisfacă ecuația funcțională

$$\alpha(ab)=\alpha(a)\,\alpha(b).$$

Rezolvarea acestei ecuații (de exemplu trecînd în coordonate polare) conduce la

$$\alpha(a)=a^{\lambda}\bar{a}^{\mu},$$

unde λ și μ sînt numere complexe, legate doar de condiția ca $\lambda-\mu$ să fie un întreg.

O distribuție $F(z,\bar{z})$ *omogenă*, cu grad de omogenitate (λ,μ) o vom defini de asemenea prin condiția (1).

Pentru a da un sens acestei relații, o scriem sub forma în care ea este valabilă pentru distribuții. Funcției $F(z,\bar{z})$ îi corespunde funcționala

$$(F,\varphi)=\frac{i}{2}\int F(z,\bar{z})\varphi(z,\bar{z})dz\,d\bar{z}.$$

*) Prin definiție $a^{\lambda}\bar{a}^{\mu}\equiv|a|^{\lambda+\mu}e^{i(\lambda-\mu)\arg a}$; pentru $\lambda-\mu$ întreg, aceasta este o funcție uniformă de a.

Cu ajutorul unei schimbări formale de variabile obținem :

$$\left(F, \varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right) = a\bar{a}\frac{\mathrm{i}}{2}\int F(az, \bar{a}\bar{z})\varphi(z, \bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Prin urmare, condiția ca F să fie distribuție omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ) se exprimă astfel :

$$\left(F, \varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{a}\right)\right) = a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(F, \varphi(z, \bar{z})). \tag{2}$$

Vom arăta mai tîrziu (pct. 6) că pentru orice pereche de numere complexe λ, μ, a căror diferență este un întreg, există — cu aproximația unui factor — exact o singură distribuție omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ).

3. *Distribuțiile omogene* $z^\lambda \cdot \bar{z}^\mu$. Vom defini acum distribuțiile omogene $z^\lambda\bar{z}^\mu$ ca funcționale liniare continue pe spațiul K al funcțiilor test. Fie pentru început $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) > -2$. *Definim în acest caz distribuția* $z^\lambda\bar{z}^\mu$ *cu ajutorul integralei convergente*

$$(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int z^\lambda\bar{z}^\mu\varphi(z, \bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}, \tag{1}$$

φ fiind o funcție indefinit derivabilă cu suport compact.

Este clar că $z^\lambda\bar{z}^\mu$ este omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ). Rămîne de a defini distribuția $z^\lambda\bar{z}^\mu$ în cazul în care $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) < -2$. Nu mai putem utiliza formula (1) pentru definiție, căci în acest caz integrala respectivă diverge. Vom arăta totuși că această integrală se poate regulariza, iar regularizata obținută furnizează o distribuție omogenă.

Introducem notațiile : $\lambda + \mu = s$, $\lambda - \mu = n$ (reamintim că n este întotdeauna un întreg, s putînd fi un număr complex arbitrar). Trecînd la formula (1) în coordonate polare, $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$, obținem :

$$(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi) = \int_\infty^0 r^{s+1}\varphi_n(r)\,\mathrm{d}r, \tag{2}$$

unde s-a notat

$$\varphi_n(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(re^{\mathrm{i}\alpha}, re^{-\mathrm{i}\alpha})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Presupunem acum că funcția test $\varphi(z, \bar{z})$ și numărul n sînt fixate. Atunci expresia $(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)$, definită de formula (2) este o funcție analitică în s, pentru $\mathrm{Re}\, s > -2$. Prelungim analitic această funcție pentru $\mathrm{Re}\, s < -2$. Tocmai această prelungire analitică (în punctele sale regulate, adică pentru $s \neq -2, -3, \ldots$) o luăm drept definiție a funcționalei $(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)$, pentru $\mathrm{Re}\, s < -2$. Este limpede că prelungirea analitică în raport cu s păstrează proprietatea de omogenitate, exprimată prin

$$\left(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right) = a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi(z, \bar{z})).$$

Astfel, funcționala $(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)$ definește în punctele de regularitate în raport cu s o distribuție pe care o vom nota $z^\lambda\bar{z}^\mu$. Prin urmare, *definim distribuția* $z^\lambda\bar{z}^\mu$ *prin integrala*

$$(z^\lambda, \bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int z^\lambda\bar{z}^\mu\varphi(z, \bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Această integrală converge pentru $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) > -2$, *și este o funcție analitică de* $s = \lambda + \mu$ *pentru* $\mathrm{Re}\, s > -2$. *Pentru* $\mathrm{Re}\, s < -2$ *această integrală trebuie înțeleasă în sensul prelungirii analitice în raport cu* s (pentru o valoare fixată a diferenței $\lambda - \mu$).

Să găsim o formă explicită pentru distribuția $z^\lambda\bar{z}^\mu$. Pentru aceasta transformăm integrala $(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)$, $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) > -2$ sub forma

$$(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|\leq 1} z^\lambda\bar{z}^\mu\left[\varphi(z, \bar{z}) - \sum_{k+l=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!}z^k\bar{z}^l\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} +$$

$$+ \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|>1} z^\lambda\bar{z}^\mu\varphi(z, \bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} + \sum_{k+l=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!}\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|\leq 1} z^{\lambda+k}\bar{z}^{\mu+l}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{3}$$

Ultimele integrale se pot calcula direct.

Anume, trecînd în coordonate polare, obținem

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|\leq 1} z^{\lambda+k}\bar{z}^{\mu+l}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = \int_0^1 r^{k+l+s+1}\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l+n)\alpha}\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{k+l+s+2} & \text{dacă } k - l = -n \\ 0 & \text{dacă } k - l \neq -n. \end{cases}$$

Astfel $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$ se poate reprezenta, pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > -2$ sub forma

$$(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int_{|z|\leqslant 1} z^\lambda \bar{z}^\mu \left[\varphi(z, \bar{z}) - \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!} z^k \bar{z}^l \right] \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} +$$

(4)

$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} \int_{|z|>1} z^\lambda \bar{z}^\mu \varphi(z, \bar{z})\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} + 2\pi \sum_{k+l=0, k-l=-n}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!(k+l+s+2)}.$$

Egalitatea (4) definește distribuția $z^\lambda \bar{z}^\mu$ pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > -m-2$. Primii termeni ai acestei expresii sînt funcții analitice de $s = \lambda + \mu$ pentru $\mathrm{Re} > -m-2$. Prin urmare, singurele singularități ale distribuției $z^\lambda \bar{z}^\mu$ sînt cele ale celui de-al treilea termen, pentru $s = -h-l-2$, $-n = k-l$, adică pentru $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$. Prin urmare, *distribuția $z^\lambda \bar{z}^\mu$ este regulă peste tot, cu excepția punctelor $\lambda, \mu = -1, -2, \ldots$. În aceste puncte, distribuția $z^\lambda \bar{z}^\mu$, considerată ca funcție de $s = \mu + \mu$ (pentru $\lambda - \mu = n$ fixat), are poli simpli.*

În punctele regulate aparținînd semiplanului $\mathrm{Res} > -m-2$, funcționala $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$ este dată de formula (4). Reziduul funcției $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$ în punctele $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ este dat de formula

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1 \\ \mu=-l-1}} (z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{2\pi}{k!\,l!} \varphi^{(k,l)}(0,0) \quad *) \tag{5}$$

Aceasta egalitate se mai poate scrie

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1 \\ \mu=-l-1}} z^\lambda \bar{z}^\mu = 2\pi \frac{(-1)^{k+l}}{k!\,l!} \delta^{(k,l)}(z, \bar{z}), \tag{6}$$

unde distribuția $\delta(z, \bar{z})$ este definită de

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0,0),$$

iar

$$\delta^{(k,l)}(z, \bar{z}) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \delta(z, \bar{z}) \quad **)$$

*) Acest reziduu trebuie înțeles ca reziduul funcției de $s = \lambda + \mu$ pentru o valoare fixată a lui $\lambda - \mu$.

**) Derivata distribuției f este definită de formula $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}, \varphi \right) = (-1)^{k+l} \left(f, \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \right)$.

Să remarcăm că în banda $-m-2 < \mathrm{Re}(\lambda+\mu) < -m-1$, expresia lui $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$ se poate aduce la o formă mai simplă

$$(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int z^\lambda \bar{z}^\mu \left[\varphi(z, \bar{z}) - \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!} z^k \bar{z}^l \right] \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z}. \tag{7}$$

În locul distribuției $z^\lambda \bar{z}^\mu$ este util de a considera regularizata sa în raport cu s

$$\frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2} \right)},$$

unde $s = \lambda + \mu$, $n = \lambda - \mu$. Funcția $\Gamma\left(\frac{(s+|n|+2}{2} \right)$ are poli simpli în punctele $s = -k-l-2$, $-n = k, -l$, $k,l, = 0, 1, 2, \ldots$, adică pentru $\lambda, \mu = -1, -2, \ldots$, adică în exact aceleași puncte ca și funcția $z^\lambda \bar{z}^\mu$. Reziduurile sale în aceste puncte sînt date de formula

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1 \\ \mu=-l-1}} \Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2} \right) = \frac{2(-1)^j}{j!} \tag{8}$$

unde $s = \frac{(k+l)-|k-l|}{2} = \min(k, l)$. Rezultă de aici că

$$\frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2} \right)}$$

este o funcție întreagă de $s = \lambda + \mu$ pentru orice valoare fixată $\lambda - \mu$. Această funcție este omogenă în z și $\bar{z}$ cu grad de omogenitate (λ, μ).

Din (8) rezultă că valoarea acestei funcții pentru $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ este dată de formula următoare:

$$\left. \frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2} \right)} \right|_{\substack{\lambda=-k-1 \\ \mu=-l-1}} = \frac{\pi(-1)^{k+l+j} j!}{k!\,l!} \delta^{(k,l)}(z, \bar{z}), \tag{9}$$

cu $j = \frac{(k+l)-|k-l|}{2} = \min(k, l)$.

Prin urmare, *pentru orice pereche de numere complexe* (λ, μ) *a căror diferență este un întreg am construit o distribuție omogenă cu grad de omogenitate* (λ, μ). Dacă cel puțin unul dintre numerele λ, μ este diferit de $-1, -2, \ldots$ această distribuție are ca suport întreg planul z. Dacă $\lambda, \mu = -1 -2, \ldots$ distribuția respectivă este concentrată în punctul $z = 0$. Vom arăta la punctul 6 că nu există alte distribuții omogene.

4. *Distribuția* z^{-k-1} *și derivatele sale.* După cum am văzut la pct. 3 distribuția $z^\lambda \bar{z}^\mu$, considerată ca funcție analitică de λ, μ este regulată pentru $\lambda = -1, -2, \ldots$ și $\mu = 0$. Există deci distribuția omogenă z^{-k-1} cu $k = 0,1, \ldots$. Această distribuție este definită ca regularizata integralei

$$(1) \qquad (z^{-k-1}, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^{-k-1}\varphi(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z},$$

anume, integrînd de k ori prin părți în raport cu z în

$$(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^\lambda \bar{z}^\mu \varphi(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}$$

și făcînd $\lambda = -k - 1$, $\mu = 0$ obținem

$$(2) \qquad (z^{-k-1}, \varphi) = \frac{1}{k!}\frac{i}{2}\int z^{-1}\varphi^{(k,0)}(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}.$$

Egalitatea (2) înseamnă că

$$z^{-k-1} = (-1)^k \frac{1}{k!}\frac{\partial^k (z^{-1})}{\partial z^k}.$$

Și calculăm derivata distribuției z^{-k-1} în raport cu $\bar{z}$. La o primă vedere s-ar părea că această derivată se anulează. Totuși nu este așa, căci funcția z^{-k-1} are un pol în punctul $z = 0$. De aceea, derivînd funcția z^{-k-1} în raport cu $\bar{z}$ trebuie să obținem o distribuție concentrată în punctul $z = 0$. Pentru a calcula derivata dorită $\frac{\partial (z^{-k-1})}{\partial \bar{z}}$ se utilizează formula

$$\frac{\partial z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^\alpha}{\partial \bar{z}} = \alpha z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^{\alpha-1},$$

unde facem pe α să tindă la zero. Conform punctului 3 avem :

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^{\alpha-1} = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-1}} z^\lambda \bar{z}^\mu = (-1)^k \frac{\pi}{k!}\delta^{(k,0)}(z, \bar{z}).$$

Astfel,

$$(3) \qquad \frac{\partial (z^{-k-1})}{\partial \bar{z}} = (-1)^k \frac{\pi}{k!}\delta^{(k,0)}(z, \bar{z}).$$

5. *Distribuții omogene asociate.* Vom numi distribuția $F(z, \bar{z})$, *distribuție asociată* de ordinul întîi, cu grad de omogenitate (λ, μ), dacă pentru orice număr complex $a \neq 0$ are loc egalitatea

$$(1) \qquad F(az, \bar{a}\bar{z}) = a^\lambda \bar{a}^\mu [F(z, \bar{z}) + \ln|a|\, F_0(z, \bar{z})],$$

unde $F_0(z, \bar{z})$ este o anumită distribuție omogenă cu același grad de omogenitate. Analog se pot defini distribuțiile omogene asociate, de ordine superioare.

Să găsim distribuțiile omogene asociate cu grad de omogenitate $(\mu\ \lambda)$.

Pentru început, să presupunem că λ, μ nu sînt simultan întregi negativi. În acest caz distribuția $z^{\lambda+s/2}\bar{z}^{\mu+s/2}$ este regulată în vecinătatea punctului $s = 0$. Dezvoltînd-o în serie Taylor în vecinătatea acestui punct obținem

$$(2) \qquad z^{\lambda+\frac{s}{2}}\bar{z}^{\mu+\frac{s}{2}} = z^\lambda \bar{z}^\mu + s z^\lambda \bar{z}^\mu \ln|z| + \frac{s^2}{2!} z^\lambda \bar{z}^\mu \ln^2|z| + \ldots$$

Este ușor de văzut că coeficienții acestei dezvoltări, adică distribuțiile $z^\lambda \bar{z}^\mu \ln|z|$, $z^\lambda \bar{z}^\mu \ln^2|z| \ldots$ sînt distribuții asociate de ordinul întîi, respectiv al doilea ș.a.m.d. Reamintim că distribuția $z^\lambda \bar{z}^\mu \ln^m|z|$ este dată explicit de formula

$$(3) \qquad (z^\lambda \bar{z}^\mu \ln^m|z|, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^\lambda \bar{z}^\mu \ln^m|z|\, \varphi(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z},$$

în care integrala trebuie înțeleasă în sensul regularizării *).

*) Regularizata integralei (3) se definește în același mod în care s-a definit regularizata integralei $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$, v. pct. 3.

Considerăm acum cazul singular, atunci cînd $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$. În acest caz distribuția $z^{\lambda+s/2}\bar{z}^{\mu+s/2}$ are un pol simplu în $s=0$. Dezvoltînd-o în serie Laurent după puterile lui s, coeficienții dezvoltării vor fi distribuțiile asociate. Termenul liber al seriei Laurent, care este o distribuție asociată de ordinul întîi, îl vom nota cu $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$; el este definit de formula

$$(z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}, \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int z^{-k-1}\bar{z}^{kl-1}\left[\varphi(z, \bar{z}) - \right.$$

(4)

$$\left. - \sum_{i+j=0}^{k+l-1} \frac{\varphi^{(i,j)}(0, 0)}{i!\,j!} z^i\bar{z}^j - \theta(1-|z|) \sum_{i+j=k+l} \frac{\varphi^{(i,j)}(0, 0)}{i!\,j!} z^j\bar{z}^j\right] \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z},$$

în care $\theta(x) = 0$ pentru $x < 0$ și $\theta(x) = 1$ pentru $x > 0$. Această formulă se deduce direct din expresia lui $(z^\lambda\bar{z}^\mu, \varphi)$, dată la punctul 3 (formula (4)).

6. *Teorema de unicitate pentru distribuțiile omogene.* La pct. 3 am construit pentru fiecare pereche de numere complexe (λ, μ) a căror diferență este un întreg, *o distribuție omogenă cu grad de omogenitate* (λ, μ). Vom demonstra acum că aceste funcționale epuizează (cu aproximația unor factori constanți) toate distribuțiile omogene în z și $\bar{z}$. Cu alte cuvinte arătăm că există exact o singură distribuție omogenă cu un grad dat de omogenitate.

La început vom stabili ecuațiile diferențiale pentru distribuțiile omogene. Fie F o distribuție omogenă, cu grad de omogenitate (λ, μ), adică verificînd

$$F(az, \bar{a}\bar{z}) = a^\lambda\bar{a}^\mu F(z, z). \tag{1}$$

Derivînd egalitatea (1) în raport cu a și făcînd $a = 1$, obținem:

$$z\frac{\partial F}{\partial z} = \lambda F. \tag{2}$$

Analog, derivînd relația (1) în raport cu $\bar{a}$ și făcînd $\bar{a} = 1$, găsim:

$$\bar{z}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \mu F. \tag{2'}$$

Prin urmare, *distribuțiile omogene* $F(z, \bar{z})$ *cu grad de omogenitate* (λ, μ) *verifică sistemul de ecuații diferențiale* (2), (2'). Să rezolvăm

acest sistem. Trecînd în coordonate polare $z = re^{\alpha i}$, $\bar{z} = re^{-\alpha i}$, sistemul capătă forma

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[r\dfrac{\partial F}{\partial r} - \mathrm{i}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\right] = \lambda F, \\ \dfrac{1}{2}\left[r\dfrac{\partial F}{\partial r} + \mathrm{i}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\right] = \mu F. \end{cases} \tag{3}$$

Pentru $r \neq 0$ acest sistem se poate integra prin metoda obișnuită. Calcule simple conduc la

$$D = Cr^{\lambda+\mu}e^{\mathrm{i}(\lambda-\mu)\alpha} = Cz^\lambda\bar{z}^\mu. \tag{4}$$

Am arătat deci, că *pentru* $z \neq 0$, *distribuția omogenă* $F(z, \bar{z})$ *cu grad de omogenitate* (λ, μ) *coincide cu funcția* $Cz^\lambda\bar{z}^\mu$.

Demonstrăm acum unicitatea distribuției omogene în cazul nesingular $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$. În acest caz distribuția $z^\lambda\bar{z}^\mu$, considerată la pct. 3 este diferită de zero în vecinătatea oricărui punct z. Să presupunem că $\Phi(z, \bar{z})$ este de asemenea o distribuție omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ). Cum tocmai am arătat, distribuția $\Phi(z, \bar{z})$ trebuie să aibă forma $\Phi(z, \bar{z}) = Cz^\lambda\bar{z}^\mu$ pentru $z \neq 0$. Prin urmare, distribuția

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - Cz^\lambda\bar{z}^\mu$$

trebuie să fie concentrată în punctul $z = 0$. Rămîne de arătat că $\Phi_1(z, \bar{z}) \equiv 0$. Pentru acesta vom folosi următorul fapt cunoscut*): orice distribuție de două variabile, avînd suportul redus la punctul $x = 0, y = 0$ este o combinație liniară de derivare ale lui $\delta(x, y)$.

Rezultă deci că distribuția $\Phi_1(z, \bar{z})$, concentrată în punctul $z = 0$ se poate reprezenta sub forma

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \sum_{k,l=0}^{n} c_{kl}\delta^{(k,l)}(z, \bar{z}).$$

Termenii acestei sume, $c_{kl}\delta^{(k,l)}(z, \bar{z})$ sînt distribuții cu grad de omogenitate $(-k-1, -l-1)$. Prin urmare, $\Phi_1(z, \bar{z})$, avînd gradul de omogenitate (λ, μ), cu $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$

*) V ezi „Funcții generalizate" vol. 2.

este evident nulă. Am stabilit astfel că orice distribuție omogenă $\Phi(z, \bar{z})$ cu grad de omogenitate (λ, μ), unde $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ este de forma

$$\Phi(z, \bar{z}) = Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}.$$

Să considerăm acum cazul singular, atunci cînd $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ cu $k, l = 0, 1, 2, \ldots$. În acest caz există distribuția omogenă cu grad de omogenitate $(-k-1, -l-1)$,

$$\delta^{(k,l)}(z, \bar{z}) = \frac{\partial^{k+l}\delta(z, \bar{z})}{\partial z^k \partial \bar{z}^l},$$

concentrată în punctul $z = 0$. Este ușor de văzut că nu există alte distribuții cu grad de omogenitate $(-k-1, -l-1)$, concentrate în $z = 0$.

Vom arăta că de asemenea nu există distribuții omogene cu grad de omogenitate $(-k-1), (-l-1)$, avînd suportul diferit de $z = 0$. Într-adevăr, să presupunem că ar exista o astfel de distribuție $\Phi(z, \bar{z})$. Atunci, pentru $z \neq 0$ ea coincide cu $Cz^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$, $C \neq 0$. Pe de altă parte, există după cum am văzut la p. 5 distribuția omogenă asociată $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$ cu grad de omogenitate $(-k-1, -l-1)$. Această distribuție coincide cu funcția $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$ pentru $z \neq 0$ *). Diferența

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - Cz^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$$

este o distribuție omogenă asociată, concentrată în punctul $x = 0$. Dar toate distribuțiile concentrate în punctul $z = 0$ sînt combinații liniare ale distribuțiilor omogene $\delta^{(k,l)}(z, \bar{z})$, și ca atare, nu pot fi distribuții omogene asociate. Am demonstrat deci că distribuția omogenă cu grad de omogenitate $(-k-1), (-l-1)$ trebuie să fie concentrată în punctul $z = 0$.

Astfel a fost arătat faptul că fiecărei perechi de numere complexe (λ, μ) a căror diferență este un întreg, îi corespunde o unică (cu aproximația unui factor constant) distribuție omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ).

Nu este greu de arătat, cu aceleași raționamente, că fiecăre perechi de numere complexe (λ, μ) ($\lambda - \mu$ întreg) îi corespunde cu

*) v. formula (4), pct. 5.

aproximația unui factor constant o singură distribuție omogenă asociată de orice rang, cu grad de omogenitate (λ, μ).

7. *Transformata Fourier a funcțiilor test și a distribuțiilor.* Transformata Fourier a unei funcții infinit derivabile cu suport compact $\varphi(z, \bar{z})$ este prin definiție funcția $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$, definită de formula

$$(1)\quad \tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar{z})\, e^{iRe(zw)}\, dz\, d\bar{z} = \int \frac{i}{2}\, \varphi(z, \bar{z})\, e^{\frac{i}{2}(zw + \bar{z}\bar{w})}\, dz\, d\bar{z}.$$

Dacă trecem de la variabilele complexe z, w la cele reale, punînd $z = x + iy$, $w = u + iv$, atunci formula (1) capătă forma următoare

$$(1')\quad \tilde{\varphi}(u, v) = \int \varphi(x, y)\, e^{i(xu - yv)}\, dx\, dy.$$

Astfel, cu excepția semnului argumentului v, funcția $\tilde{\varphi}$ coincide cu transformata Fourier uzuală a funcției φ, dacă aceasta din urmă este considerată ca funcție de două variabile reale x, y *).

Dacă $\varphi(z, \bar{z})$ și $f(z, \bar{z})$ sînt două funcții test, iar $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$ și $\tilde{f}(w, \bar{w})$ transformatele lor Fourier, are loc relația

$$(2)\quad \frac{i}{2}\int f(z, \bar{z})\overline{\varphi(z, \bar{z})}\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{i}{2}\int \tilde{f}(w, \bar{w})\overline{\tilde{\varphi}(w\ \bar{w})}\, dw\, d\bar{w},$$

care se numește egalitatea lui Plancherel. Această egalitate arată că funcția $\tilde{f}(w, \bar{w})$, considerată ca distribuție, acționează asupra funcției $\overline{\tilde{\varphi}(w, \bar{w})}$ după formula

$$(3)\quad (\tilde{f}, \overline{\tilde{\varphi}}) = 4\pi^2 (f, \overline{\varphi}).$$

Nu este greu de văzut că funcția $\overline{\tilde{\varphi}(w, \bar{w})}$ este transformata Fourier a funcției $\overline{\varphi(-z, -\bar{z})}$. Astfel, dacă în egalitatea (3) înlocuim funcția $\tilde{\varphi}$ cu $\overline{\tilde{\varphi}}$ obținem:

$$(4)\quad (\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = 4\pi^2 (f,\ \varphi(-z, -\bar{z})).$$

*) Este citeodată comod de a defini transformata Fourier printr-o altă formulă:

$$\tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar{z})\, e^{\frac{i}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)}\, dz\, d\bar{z}.$$

Cu această definiție, funcția $\tilde{\varphi}$ coincide cu transformata Fourier a funcției φ, considerată ca funcție de variabilele x și y. Vom utiliza de la caz la caz ambele definiții.

Egalitatea (4) poate sluji drept definiție a transformatei Fourier a distribuției $F(z, \bar{z})$. Anume, *transformata Fourier a distribuției* $F(z, \bar{z})$ va fi funcția generalizată $\tilde{F}(w, \bar{w})$ definită de egalitatea

$$(\tilde{F}, \tilde{\varphi}) = 4\pi^2(F, \varphi_1), \tag{5}$$

în care $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$ este transformata Fourier a funcției $\varphi(z, \bar{z})$, iar $\varphi_1(z, \bar{z}) = \varphi(-z, -\bar{z})$.

Să remarcăm că $\tilde{F}$ nu va fi o distribuție, adică o funcțională liniară pe spațiul K al funcțiilor indefinit derivabile cu suport compact, ci o funcțională pe spațiul Z, ale cărui elemente sînt transformatele Fourier ale funcțiilor test.

Dimpotrivă dacă considerăm distribuții ce sînt funcționale liniare continue pe spațiul S ale funcțiilor infinit derivabile ce tind rapid către zero împreună cu derivatele lor de orice ordin, atunci F și $\tilde{F}$ vor fi definite pe același spațiu de funcții test *).

Arătăm că *transformata Fourier* $\tilde{F}$ *a unei distribuții* F *cu grad de omogenitate* (λ, μ) *este o funcție generalizată omogenă cu grad de omogenitate* $(-\lambda - 1, -\mu - 1)$. Într-adevăr, dacă $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$ este transformata Fourier a funcției $\varphi(z, \bar{z})$, atunci transformata Fourier a funcției $\varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)$ va fi $|a|^2\,\tilde{\varphi}(aw, \bar{a}\bar{w})$. Deci dacă $F(z, \bar{z})$ este o distribuție omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ) vom avea:

$$|a|^2(\tilde{F}, \tilde{\varphi}(aw, \bar{a}\bar{w})) = 4\pi^2\left(F, \varphi\left(-\frac{z}{a}, -\frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right) =$$

$$= 4\pi^2 a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(F, \varphi(-z - \bar{z})) = a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(\tilde{F}, \tilde{\varphi}).$$

Înlocuind în această egalitate pe a cu a^{-1}, obținem:

$$\left(\tilde{F}, \tilde{\varphi}\left(\frac{w}{\bar{a}}, \frac{\bar{w}}{\bar{a}}\right)\right) = \bar{a}^{\lambda}\bar{a}^{-\mu}(\tilde{F}, \tilde{\varphi}). \tag{6}$$

Prin urmare, $\tilde{F}$ este o funcțională omogenă cu grad de omogenitate $(-\lambda - 1, -\mu - 1)$.

*) Distribuțiile pe S, adică elementele dualului S' al spațiului S se numesc distribuții *temperate*. (Nota trad).

Am arătat în pct. 3 că distribuția omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ) este dată de formula

$$F(z, \bar{z}) = \frac{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{s + |n| + 2}{2}\right)},$$

în care $s = \lambda + \mu$, $n = \lambda - \mu$. Avem deci,

$$\frac{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{s + |n| + 2}{2}\right)} = c(\lambda, \mu)\frac{w^{-\lambda-1}\bar{w}^{-\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{-s + |n|}{2}\right)}, \tag{7}$$

unde $c(\lambda, \mu)$ este o anumită constantă. Această constantă se poate calcula comparînd pe $(F, \varphi(-z, -\bar{z}))$ și $(\tilde{F}, \tilde{\varphi})$ pentru o funcție $\varphi(z, \bar{z})$ convenabilă. Vom arăta că

$$c(\lambda, \mu) = 2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{|\lambda-\mu|}. \tag{8}$$

Prin urmare, transformata Fourier a distribuției omogene cu grad de omogenitate (λ, μ) este dată de formula

$$\frac{\widetilde{z^{\lambda}\bar{z}^{\lambda}}}{\Gamma\left(\frac{s + |n| + 2}{2}\right)} = 2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{|\lambda-\mu|}\frac{w^{-\lambda-1}\bar{w}^{-\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{-s + |n|}{2}\right)}, \tag{9}$$

în care $s = \lambda + \mu$, $n = \lambda - \mu$.

Să trecem la calculul constantei $c(\lambda, \mu)$. Presupunem pentru a fixa ideile că $n = \lambda - \mu \geqslant 0$. Alegem drept funcție test *)

$$\varphi(z, \bar{z}) = \bar{z}^{\lambda-\mu}\,e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}.$$

*) Această funcție nu este cu suport compact. Totuși, deoarece funcția $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$ este cu creștere polinomială, funcționala $(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}, \varphi)$ se poate prelungi pe spațiul tuturor funcțiilor indefinit derivabile cu descreștere rapidă și deci, în particular alegerea făcută este justificată.

Vom calcula transformata Fourier a acestei funcții. Un calcul direct dă :

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(zw+\bar{z}\bar{w})}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\pi\mathrm{e}^{-\frac{w\bar{w}}{2}}.$$

Derivînd această egalitate de n ori în raport cu $\bar{w}(n = \lambda - \mu)$, obținem :

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{\lambda-\mu+1}\int \bar{z}^{\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(zw+\bar{z}\bar{w})}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\pi\left(-\frac{w}{2}\right)^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{w\bar{w}}{2}},$$

de aici rezultă

$$\widetilde{\bar{z}^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}} = 2\pi\mathrm{i}^{\lambda-\mu}w^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{w\bar{w}}{2}}.$$

Introducînd expresiile obținute pentru $\widetilde{\bar{z}^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}}$ și $\dfrac{\widetilde{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}}{\Gamma\left(\dfrac{s+|n|+2}{2}\right)}$ în egalitatea

$$\left(\frac{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{s+|n|+2}{2}\right)},\ \widetilde{\bar{z}^{\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{-\frac{\bar{z}z}{2}}}\right) =$$

$$= 4\pi^2\left(\frac{z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{s+|n|+2}{2}\right)},\ (-\bar{z})^{\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\right),$$

obținem :

$$\frac{2\pi\mathrm{i}^{\lambda-\mu}c(\lambda,\mu)}{\Gamma(-\mu)}\,(w^{-\lambda-1}\bar{w}^{-\mu-1},\ w^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{w}w}{2}}) =$$

(10)

$$= (-1)^{\lambda-\mu}\,\frac{4\pi^2}{\Gamma(\lambda+1)}\,(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \bar{z}^{-\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{-\frac{\bar{z}z}{2}}).$$

Expresiile ce figurează în ambii membri ai acestei egalități se calculează ușor ținînd seama de formula

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int (z\bar{z})^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{z}z}{2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\pi\int_0^{\infty} r^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = 2^{\alpha}\pi\Gamma(\alpha)$$

(pentru $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ integrala trebuie înțeleasă ca regularizată). Avem

$$(z^{\lambda}\bar{z}^{-\mu},\ \bar{z}^{\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{-\frac{\bar{z}z}{2}}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int (z\bar{z})^{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2^{\lambda+1}\pi\Gamma(\lambda+1)$$

și

$$(w^{-\lambda-1}\bar{w}^{\lambda-\mu},\ w^{\lambda-\mu}\mathrm{e}^{-\frac{w\bar{w}}{2}}) = 2^{-\mu}\pi\Gamma(-\mu).$$

Introducînd aceste expresii în (10) obținem formula căutată $c(\lambda,\mu) = 2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{\lambda-\mu}$. Formula a fost obținută în ipoteza $\lambda - \mu \geqslant 0$. Atunci cînd $\lambda - \mu < 0$, în această formulă trebuie permutat λ cu μ. Are loc deci formula unică $C(\lambda,\mu) = 2^{\lambda+\mu+2}\pi\mathrm{i}^{|\lambda-\mu|}$.

Drept exemplu, iată formulele transformatelor Fourier atunci cînd λ și μ sînt întregi de același semn :

$$\widetilde{z^k\bar{z}^l} = 4\pi^2(-2\mathrm{i})^{k+l}\delta^{(k,l)}(w,\bar{w})$$

și

$$\widetilde{\delta^{(k,l)}(z,\bar{z})} = (2\mathrm{i})^{-k-l}w^k\bar{w}^l,$$

$k, l = 0, 1, 2, \ldots$

8. *Distribuția $f^{\lambda}(z)\,\bar{f}^{\mu}(z)$, $f(z)$ fiind o funcție meromorfă.* Definim distribuția $f^{\lambda}(z)\,\bar{f}^{\mu}(z)$, $f(z)$ fiind funcție meromorfă de variabilă z, iar λ, μ numere complexe a căror diferență $\lambda - \mu$ este un număr întreg.

La început considerăm cazul cel mai simplu, atunci cînd $f(z)$ este o funcție întreagă. În acest caz distribuția $f^{\lambda}(z)\,\bar{f}^{\mu}(z)$ se definește cu ajutorul formulei

$$(1)\qquad (f^{\lambda}\bar{f}^{\mu},\ \varphi) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int f^{\lambda}(z)\,\bar{f}^{\mu}(z)\,\varphi(z,\bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Pentru un $\lambda - \mu = n$ fixat integrala (1) converge atunci cînd $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > 0$ și este în banda respectivă o funcție analitică de $\lambda+\mu$.

Pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)<0$ integrala va fi înțeleasă în sensul prelungirii analitice în raport cu $\lambda+\mu$. Scopul nostru este de a da un sens integralei (1), atunci cînd $f(z)$ este meromorfă. O definiție ca mai sus nu se poate da, căci în acest caz integrala (1), în general, nu converge pentru niciun λ și μ.

Orice funcție test $\varphi(z,\bar{z})$ din spațiul K se poate reprezenta ca o combinație liniară de funcții din K, avînd fiecare suportul suficient de mic. De aceea, trebuie pentru început să dăm un sens integralei (1) pentru funcții $\varphi(z,\bar{z})$ avînd suportul suficient de mic.

Fie $\varphi(z,\bar{z})$ o funcție avînd suportul într-un domeniu ce conține un zero de multiplicitate k al funcției $f(z)$ și care să nu conțină poli ai funcției $f(z)$. În acest caz, pentru $\lambda-\mu$ dat, integrala (1) converge pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)>0$ și este analitică, ca funcție de $\lambda+\mu$, în acest domeniu. Pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)<0$ o definim cu ajutorul prelungirii analitice în raport cu $\lambda+\mu$.

Să găsim singularitățile funcției $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ în acest caz. Nu micșorăm generalitatea presupunînd că zeroul funcției $f(z)$ este punctul $z=0$ și că funcția $\varphi(z)$ are suportul inclus într-o vecinătate a acestui punct. Atunci

$$f(z)=z^k f_1(z),$$

funcția $f_1(z)$ fiind regulată în vecinătatea punctului $z=0$, iar $f_1(0)\neq 0$. Prin urmare

$$(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)=\frac{\mathrm{i}}{2}\int z^{k\lambda}\bar{z}^{k\mu}f_1^\lambda(z)\bar{f}_1^\mu(z)\varphi(z,\bar{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Se vede de aici că punctele singulare ale funcției $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ coincid cu punctele singulare ale distribuției omogene $z^{k\lambda}\bar{z}^{k\mu}$, considerată ca funcție de λ,μ. Aplicînd rezultatele de la pct. 3, conchidem: *dacă funcția $\varphi(z)$ are suportul conținut într-o vecinătate a unui zero de multiplicitate k al funcției $f(z)$, atunci singurele singularități ale lui $(f^\lambda f^{-\mu},\varphi)$ (considerată ca funcție analitică de λ,μ) sînt poli simpli în punctele* $(\lambda,\mu)=\left(-\frac{p}{k},-\frac{q}{k}\right)$ $p,q=1,2,\ldots$ $(\lambda-\mu$ întreg).

Fie acum funcția $\varphi(z)$ avînd suportul conținut într-un domeniu ce conține un pol de multiplicitate l al funcției $f(z)$ și care să nu conțină zerouri ale funcției $f(z)$. Atunci $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ din nou converge pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)<0$; pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)>0$ o definim cu ajutorul prelungirii analitice în raport cu $\lambda+\mu$.

Repetînd raționamentele precedente conchidem fără dificultate că *dacă funcția $\varphi(z)$ are suportul într-o vecinătate a unui pol de ordin l al funcției $f(z)$, singurele singularități ale lui $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$* (considerată ca funcție analitică de λ,μ) *sînt poli simpli în punctele* $(\lambda,\mu)=\left(\frac{p}{l},\frac{q}{l}\right)$, $p,q=1,2,\ldots$ $(\lambda-\mu$ întreg).

Am dat astfel un sens integralei $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ în cazul în care funcția φ are suportul conținut într-un domeniu ce conține un singur zerou, sau un singur pol al funcției $f(z)$.

Definim, în sfîrșit, integrala $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ pentru o funcție $\varphi(z,\bar{z})$ arbitrară, cu suport compact. Reprezentăm funcția $\varphi(z,\bar{z})$ sub forma unei sume finite

$$\varphi(z,\bar{z})=\sum_i\varphi_i(z,\bar{z}) \tag{2}$$

de funcții cu suport compact $\varphi_i(z,\bar{z})$, suportul fiecăreia dintre aceste funcții conținînd cel mult un singur zerou sau un singur pol al funcției $f(z)$. Integralele $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ avînd deja sens, vom pune:

$$(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi_i)=\sum_i(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi). \tag{3}$$

Este ușor de văzut că $(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi)$ nu depinde de alegerea reprezentării funcției $\varphi(z,z)$. Într-adevăr fie $\varphi=\sum\varphi_j'$ și $\varphi=\sum\varphi_j''$ două astfel de reprezentări, în care funcțiile ce corespund unui același zerou sau pol al funcției $f(z)$ vor fi notate cu același indice. Atunci funcțiile $\varphi_j'-\varphi_j''$ se anulează în vecinătatea oricărui zerou și pol al funcției $f(z)$, și deci, pentru orice λ,μ avem:

$$(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi_j'-\varphi_j'')=\frac{\mathrm{i}}{2}\int f^\lambda\bar{f}^\mu[\varphi_j'(z)-\varphi_j''(z)]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z},$$

unde în membrul drept figurează o integrală convergentă. Pentru că $\sum(\varphi_j'-\varphi_j'')=0$, sumînd în raport cu j acestei integrale, obținem zero. Prin urmare,

$$\sum_j(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi_j')-\sum_j(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi_j'')=\sum_j(f^\lambda\bar{f}^\mu,\varphi_j'-\varphi_j'')=0.$$

Am definit deci distribuția $f^\lambda\bar{f}^\mu$, $f(z)$ fiind o funcție meromorfă arbitrară. *Distribuția $f^\lambda\bar{f}^\mu$ este o funcție analitică de λ,μ peste tot, cu excepția punctelor*

$$(\lambda,\mu)=\left(-\frac{p}{k},-\frac{q}{k}\right)\text{ și }(\lambda,\mu)=\left(\frac{p}{l},\frac{q}{l}\right),$$

în care k parcurge mulțimea multiplicităților zerourilor funcției $f(z)$, l cea a polurilor, iar $p, q = 1, 2, \ldots (\lambda - \mu$ întreg).
În aceste puncte funcția $f^\lambda \bar{f}^\mu$ are poli simpli.

Vedem, în particular, că distribuția $f^\lambda \bar{f}^\mu$, considerată ca funcție de λ, μ este regulată pentru $\lambda = k, \mu = 0, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Astfel, pentru orice funcție meromorfă $f(z)$ am definit distribuția f^k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

§ 2. DISTRIBUȚII ÎN m VARIABILE COMPLEXE

1. *Distribuțiile $\delta(P)$ și $\delta^{(k,l)}(P)$.* Începem cu definirea distribuțiilor în spațiul complex m-dimensional, concentrate pe hipersuprafața S de dimensiune reală $2m - 2$. Considerăm hipersuprafața S, dată de ecuația

$$P(z) \equiv P(z_1, \ldots, z_m) = 0,$$

$P(z)$ fiind o funcție infinit derivabilă (de z și $\bar{z}$) *).

Vom presupune că forma diferențială $\mathrm{dP}\overline{\mathrm{dP}}$ nu se anulează nicăeri pe hipersuprafața $P = 0$.

Această condiție are un sens geometric simplu. Anume vom considera spațiul variabilelor $z_1, \ldots, \bar{z}_m$ ca un spațiu $2m$-dimensional al variabilelor x_k, y_k ($z_k = x_k + iy_k$), $k = 1, \ldots, m$. Suprafața S este dată în spațiul real de două ecuații, $\mathrm{Re}\ P = 0$, $\mathrm{Im}\ P = 0$. Condiția impusă funcției P revine la faptul că suprafețele $\mathrm{Re}\ P = \xi$ și $\mathrm{Im}\ P = \eta$ au proprietatea că, în vecinătatea fiecărui punct al suprafeței S se pot introduce coordonate locale reale astfel încît două dintre ele să fie ξ și η.

Sub această ipoteză a fost definită distribuția $\delta(\mathrm{Re}\ P, \mathrm{Im}\ P)$ concentrată pe suprafața S. Vom nota acum această distribuție cu $\delta(P)$. Este însă preferabil de a defini $\delta(P)$ fără a trece prin terminologia spațiului real; acest lucru îl facem în cele ce urmează:

Definim distribuția $\delta(P)$ prin formula următoare

$$(1) \qquad (\delta(P), \varphi) = \int_{P=0} \varphi\omega,$$

*) Ar fi fost mai corect de a nota această funcție cu $P(z, \bar{z})$. Totuși, pentru a nu complica scrierea vom nota funcțiile de m variabile complexe mai simplu $P(z)$.

în care ω este o $2m - 2$ formă diferențială, definită de relația

$$(2) \qquad \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{i}}{2}\, \mathrm{d}P\, \overline{\mathrm{d}P}\omega\ *)$$

Am folosit aici notația

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}\bar{z}_1 \ldots \mathrm{d}z_m\, \mathrm{d}\bar{z}_m.$$

Astfel $\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}\bar{z}$ este notația prescurtată pentru forma diferențială

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}\bar{z}_1 \ldots \mathrm{d}z_m\, \mathrm{d}\bar{z}_m \equiv \mathrm{d}x_1\, dy_1 \ldots \mathrm{d}x_m\, \mathrm{d}y_m.$$

Pentru schimbarea de variabile în integrale este mai convenabil de a schimba ordinea termenilor și de a scrie această formă astfel:

$$\frac{\mathrm{i}^{m^2}}{2^m} \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_m\, \mathrm{d}\bar{z}_1 \ldots \mathrm{d}\bar{z}_m.$$

Mai departe,

$$\mathrm{d}P = \sum \frac{\partial P}{\partial z_k} \mathrm{d}z_k + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_k} \mathrm{d}\bar{z}_k.$$

Definim acum derivatele $\delta^{(k,l)}(P) = \dfrac{\partial^{k+l}\, \delta(P)}{\partial P^k\, \partial \bar{P}^l}$ ale distribuției $\delta(P)$. Aceste distribuții vor fi definite ca integralele pe suprafața $P = 0$ ale anumitor forme diferențiale $\omega_{k,l}(\varphi)$, depinzînd de funcția P precum și de funcția test φ împreună cu derivatele sale.

Notăm cu $\omega_{0,0}(\varphi)$ forma diferențială $\varphi\omega$, unde forma diferențială este definită de formula (2). Introducem forma $\omega_{k,l}(\varphi)$ ($k, l = 0, 1, \ldots$) cu ajutorul formulelor de recurență

$$(3) \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}\bar{P}\omega_{k-1,l}(\varphi)) = \mathrm{d}P\, \mathrm{d}\bar{P}\, \omega_{k,l}(\varphi),$$

$$(4) \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}P\omega_{k,l-1}(\varphi)) = -\, \mathrm{d}P\mathrm{d}\bar{P}\, \omega_{k,l}(\varphi).**)$$

*) Trecînd în real se vede ușor că forma diferențială ω, verificînd condiția (2), există și că distribuția $\delta(P)$ definită de formula (1) este unic definită (deși forma ω nu este definită în mod unic).

**) Formule analoage au fost cercetate amănunțit în cap. VII, § 1.9.

Distribuția $\delta^{(k,l)}(P) = \dfrac{\partial^{k+l}\delta(P)}{\partial P^k \partial \bar{P}^l}$ este definită de formula următoare:

$$(5) \qquad (\delta^{(k,l)}(P), \varphi) = (-1)^{k+l} \int_{P=0} \omega_{k,l}(\varphi).$$

Se poate arăta că formele $\omega_{k,l}(\varphi)$ există și că ele sînt definite de egalitățile (3), (4) cu aproximația unor termeni de forma $d\tau + \alpha d\bar{P} + \beta d\bar{P}$ cu τ, α, β, $2m-3$ — forme. Rezultă de aici, în virtutea teoremei lui Stokes, că distribuția $\delta^{k,l}(P)$ este definită în mod unic de formula (5). Demonstrația acestui fapt se face exact ca în cazul spațiului real (v. cap. VII, § 1.9).

Să dăm cîteva proprietăți ale distribuțiilor $\delta^{k,l}(P)$*

1. Distribuția $\delta^{k,l}(P)$ se poate deriva ca o funcție compusă

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial z_i}\delta^{k,l}(P) = \frac{\partial P}{\partial z_i}\delta^{(k+1,l)}(P) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial z_i}\delta^{(k,l+1)}(P),$$

$$(6') \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\delta^{(k,l)}(P) = \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_i}\delta^{(k+1,l)}(P) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}_i}\delta^{(k,l+1)}(P).$$

2. Au loc următoarele identități ce leagă pe $\delta(P)$ de derivatele sale:

$$(7) \qquad P\delta(P) = \bar{P}\delta(P) = 0,$$

$$(8) \qquad P\delta^{(k,l)}(P) + k\delta^{(k-1,l)}(P) = 0,$$

$$(8') \qquad \bar{P}\delta^{(k,l)}(P) + l\delta^{(k,l-1)}(P) = 0.$$

3. Dacă suprafețele $P = 0$, $Q = 0$ nu au puncte singulare și nu se intersectează, și deci suprafața $PQ = 0$ nu are puncte singulare, atunci

$$(9) \qquad \delta(PQ) = P^{-1}\bar{P}^{-1}\,\delta(Q) + Q^{-1}\bar{Q}^{-1}\,\delta(P).$$

** Demonstrațiile se fac ca în cazul spațiului real.

În particular, dacă funcția $a(z)$ nu se anulează, atunci

$$(10) \qquad \delta(aP) = a^{-1}\bar{a}^{-1}\,\delta(P).$$

Noi formule interesante se obțin derivînd egalitatea (10).

Astfel, dacă funcția P este analitică $\left(\dfrac{\partial P}{\partial \bar{z}_i} = 0\right)$, atunci

$$(11) \qquad \delta^{(k,l)}(aP) = a^{-k-1}\,\bar{a}^{-l-1}\,\delta^{(k,l)}(P),$$

pentru orice funcție $a(z)$ ce nu se anulează. Lăsăm cititorului deducerea acestei formule.

2.2. *Distribuțiile* $G^\lambda \bar{G}^{-\mu}$. Vom defini aici distribuții asociate unei funcții analitice întregi G. Fie $G(z_1, \ldots, z_m)$ o funcție întreagă oarecare. Dacă λ, μ sînt numere complexe astfel încît diferența lor să fie întreagă, atunci funcția

$$(1) \qquad G^\lambda \bar{G}^\mu = |G|^{\lambda+\mu} e^{i(\lambda-\mu)\arg G}$$

este o funcție univocă de $z_1, \ldots, z_m$.

Asociem funcției $G^\lambda \bar{G}^\mu$ distribuția $G^\lambda \bar{G}^\mu$, definită astfel:

$$(2) \qquad (G^\lambda\,\bar{G}^\mu,\ \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^\lambda(z)\bar{G}^\mu(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z},$$

în care $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $dz\,d\bar{z} = dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_m d\bar{z}_m$ (integrarea se face pe întreg spațiul complex). Pentru $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > 0$, integrala (2) converge, și pentru $\lambda - \mu$ dat este analitică în $\lambda + \mu$. Prelungind analitic această funcție în raportcu $\lambda + \mu$ definim funcționala $(G^\lambda\,\bar{G}^\mu,\ \varphi)$ pentru alte valori ale lui λ, μ.

Dorim să studiem distribuția $G^\lambda \bar{G}^\mu$ ca funcție analitică de λ, μ. Punctele singulare ale acestei funcții analitice sînt strîns legate de caracterul suprafeței $G(z_1, \ldots, z_m) = 0$.

În acest paragraf vom considera cazul cel mai simplu, atunci cînd suprafața $G(z_1, \ldots, z_m)$ nu are puncte singulare, adică atunci cînd derivatele $\dfrac{\partial G}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial G}{\partial z_m}$ nu se anulează simultan într-un punct al suprafeței.

Cazul general, atunci cînd pe suprafața $G = 0$ sînt puncte singulare se va considera mai tîrziu la pct. 9.

Dacă suprafața $G(z_1, \ldots z_m) = 0$ nu are puncte singulare, atunci singurele singularități ale distribuției $G^\lambda \bar{G}^\mu$, considerată ca funcție de λ, μ sînt poli simpli în punctele

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1) \quad k, l = 0,1, \ldots$$

cu reziduuri

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} G^\lambda \bar{G}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\, l!} \delta(k, l)\ (G)^* \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă suprafața $G(z_1, \ldots, z_m) = 0$ nu are singularități, atunci în vecinătatea U a oricărui punct al acestei suprafețe se pot introduce coordonatele locale $w_1, \ldots, w_{m-1}$, ζ cu $\zeta = G(z_1, \ldots, z_m)$. Dacă acum funcția test are suportul în U, atunci

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int G^\lambda(z)\, \bar{G}^\mu(z)\, \varphi(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{i}}{2} \int \zeta^\lambda\, \bar{\zeta}^\mu\, \Phi(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\bar{\zeta},$$

unde prin $\Phi(\zeta)$ s-a notat integrala funcției $\varphi(z)$ în raport cu ansamblul variabilelor $w_1, \ldots w_{m-1}$ (pentru un ζ dat).

Dar, după cum am văzut deja în § 1, singurele singularități ale distribuției $\zeta^\lambda \bar{\zeta}^\mu$, considerată ca funcție analitică de λ, μ, sînt poli simpli în punctele

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1) \qquad k, l = 0,1, \ldots,$$

avînd reziduurile

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} \zeta^\lambda \bar{\zeta}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\, l!} \delta^{(k,l)}(G).$$

Prin urmare, același lucru este adevărat și pentru funcția $G^\lambda \bar{G}^\mu$ și anume, singurele singularități ale distribuției $G^\lambda\, \bar{G}^\mu$ considerată ca funcție de λ, μ sînt poli simpli în punctele $(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0,1, \ldots$. După cum se vede ușor,

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} G^\lambda\, \bar{G}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\, l!} \delta^{(k,l)}(G).$$

* Reamintim că reziduul trebuie înțeles ca reziduu în raport cu $s = \lambda + \mu$ pentru o valoare fixată a lui $\lambda - \mu$.

Observație. Avînd în vedere caracterul local al considerațiilor făcute, același rezultat are loc și atunci cînd se consideră funcții ce nu sînt definite pe întreg spațiul variabilelor $z_1, \ldots, z_m$ ci pe o suprafață analitică neavînd puncte singulare.

3. *Distribuții omogene.* Funcția $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$ de m variabile complexe se numește omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ), dacă pentru orice număr complex $\alpha \neq 0$ are loc relația

$$f(\alpha z) = \alpha^\lambda \bar{\alpha}^\mu f(z). \tag{1}$$

Să presupunem că diferența $\lambda - \mu$ este un întreg. Această condiție asigură faptul că produsul $\alpha^\lambda \bar{\alpha}^\mu$ este definit în mod unic.

O distribuție omogenă $f(z)$ cu grad de omogenitate (λ, μ) este definită de aceeași relație (1), scrisă însă astfel încît să aibă sens pentru distribuții.

Funcției $f(z)$ îi asociem funcționala

$$(f, \varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int f(z) \varphi(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} \tag{2}$$

cu $\mathrm{d}z\, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}\bar{z}_1 \ldots \mathrm{d}z_m \mathrm{d}\bar{z}_m$. Este evident că relația (1) este echivalentă cu următoarea relație

$$\left(f, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+m} \bar{\alpha}^{\mu+m} (f, \varphi(z)). \tag{3}$$

Să dăm exemplu important de distribuție omogenă. Definim distribuția $\delta(z)$ prin

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Este evident că $\delta(z)$ este omogenă, cu grad de omogenitate $(-m, -m)$. Derivatele sale $\dfrac{\partial^{k+l} \delta(z)}{\partial z_i^k \partial \bar{z}_j^l}$ sînt distribuții omogene de grad $(-m-k, -m-l)$.

Arătăm că nu există, în afara lui $\delta(z)$, alte distribuții omogene de grad $(-m, -m)$, cu suportul redus la punctul $z = 0$. Într-adevăr, orice distribuție concentrată în punctul $z = 0$ este o combinație liniară de δ și de derivatele sale. Dar derivatele lui $\delta(z)$ au grade de omogenitate diferite de $(-m, -m)$. Prin urmare, dacă distribuția f, concentrată în $z = 0$ este omogenă de grad $(-m, -m)$, ea trebuie

să coincidă — cu aproximația unui factor constant — cu distribuția $\delta(z)$.

Dăm fără demonstrație cîteva proprietăți simple ale distribuțiilor omogene;

1. Produsul dintre o distribuție omogenă f de grad (λ, μ) cu o funcție indefinit derivabilă, omogenă de grad (λ', μ') este o distribuție omogenă cu grad de omogenitate $(\lambda + \lambda', \mu + \mu')$.

2. Derivata $\dfrac{\partial^{k+l} f(z)}{\partial z_i^k \partial \bar{z}_j^l}$ unei distribuții omogene $f(z)$ de grad (λ, μ) este o distribuție omogenă de grad $(\lambda - k, \mu - l)$.

3. Pentru ca distribuția f să fie omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ), este necesar și suficient ca ea să verifice sistemul de ecuații ale lui Euler,

$$\sum_{k=1}^{m} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k} = \lambda f, \quad \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \mu f.$$

4. *Funcții omogene asociate.* Numim funcție omogenă asociată de ordinul întîi, cu grad de omogenitate (λ, μ), o funcție $f_1(z)$ ce verifică pentru orice număr complex $\alpha \neq 0$ condiția următoare:

$$f_1(\alpha z) = \alpha^{\lambda} \bar{\alpha}^{\mu} [f_1(z) + \ln |\alpha| f_0(z)], \tag{1}$$

cu $f_0(z) \not\equiv 0$, funcție omogenă de grad (λ, μ). De exemplu, $\ln |z_1|$ este funcția omogenă asociată de ordinul întîi, cu grad de omogenitate $(0, 0)$ pentru că,

$$\ln |\alpha z_1| = \ln |z_1| + \ln |\alpha|.$$

O distribuție omogenă asociată, de ordinul întîi, cu grad de omogenitate (λ, μ) se definește prin aceeași condiție (1). Pentru a scrie această condiție sub o formă aplicabilă distribuțiilor, considerăm în locul funcției $f_1(z)$ funcționala (f_1, φ). Atunci condiția (1) este echivalentă cu

$$\left(f_1, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+m} \bar{\alpha}^{\mu+m} (f_1, \varphi(z)) + \alpha^{\lambda+m} \bar{\alpha}^{\mu+m} \ln |\alpha| (f_0, \varphi(z)), \tag{2}$$

în care $f_0 \not\equiv 0$ este o distribuție omogenă de grad (λ, μ). Să dăm o definiție prin recurență a distribuțiilor asociate de ordin k. Vom spune că distribuția f_k este distribuție omogenă asociată de ordin k, cu grad de omogenitate (λ, μ), dacă pentru orice $\alpha \neq 0$ are loc

relația

$$\left(f_k, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+m} \bar{\alpha}^{\mu+m} (f_k, \varphi) + \alpha^{\lambda+m} \bar{\alpha}^{\mu+m} \ln |\alpha| (f_{k-1}, \varphi), \tag{3}$$

în care f_{k-1} este distribuția omogenă asociată de ordin $(k-1)$ cu grad de omogenitate (λ, μ).

Distribuțiile asociate se pot obține din distribuțiile omogene în modul următor. Fie $f_{\lambda,\mu}$ distribuția omogenă cu grad de omogenitate (λ, μ), derivabilă în raport cu parametrul $s = \lambda + \mu$ *. În acest caz, derivata $\dfrac{\partial f_{\lambda,\mu}}{\partial s}$ va fi distribuția asociată de ordinul 1. Analog, derivata în raport cu s a distribuției asociate de ordin k va fi distribuția asociată de ordin $(k+1)$.

Demonstrația se face derivînd ambii membri ai egalității (3) în raport cu s, ținînd seama că

$$\alpha^{\lambda} \bar{\alpha}^{\mu} = |\alpha|^s e^{i(\lambda-\mu)\arg \alpha}.$$

5. *Reziduul unei funcții omogene.* Numeroase rezultate privind funcțiile omogene se pot formula în termeni de reziduuri.

Pentru început să reamintim definiția reziduului unei funcții omogene definite pe spațiul real (v. cap. III) Fie dată o funcție omogenă $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, cu grad de omogenitate $-m$, adică verificînd pentru orice $\alpha > 0$

$$f(\alpha x) = \alpha^{-m} f(x).$$

Presupunem funcția $f(x)$ continuă peste tot, cu excepția originii. În aceste condiții, *reziduul funcției omogene* $f(x)$ (în origine) *se numește expresia*

$$\operatorname{Res} f(x) = \int_{\Gamma} f(x)\, \omega, \tag{1}$$

unde

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} x_k \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_{k-1}} \mathrm{d}x_{k+1} \ldots \mathrm{d}x_m,$$

iar integrala este calculată pe o suprafață oarecare Γ *ce înconjoară originea.*

* Mai precis, pentru fiecare valoare fixată $\lambda - \mu$, funcția $f_{\lambda,\mu}$ este derivabilă în raport cu $s = \lambda + \mu$.

Forma diferențială ω are o interpretare geometrică simplă. Anume, $\frac{1}{n}\omega$ reprezintă volumul conului cu vîrful în punctul $x = 0$ și a cărui bază este elementul de arie. Se vede de aici că $\operatorname{Res} f(x)$ nu depinde de alegerea suprafeței Γ, și deci este perfect definit dîndu-se doar funcția $f(x)$. În particular, dacă $f(x) > 0$, atunci alegînd drept Γ varietatea $f(x) = 1$, obținem:

$$\operatorname{Res} f(x) = \int_\Gamma \omega = \overline{n}V,$$

unde cu V s-a notat volumul domeniului $f(x) > 1$, ce conține originea.

Să remarcăm că se poate exprima integrala unei funcții $f(x)$ calculată pe întreg spațiul cu ajutorul reziduului. Fie Γ o suprafață oarecare, supusă la singura condiție că intersectează orice rază ce trece prin origine o singură dată. Atunci orice punct al spațiului se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$x = \alpha y,$$

cu $\alpha > 0$, iar y aparține suprafeței Γ. Perechea α, y se poate considera ca fiind coordonatele polare generalizate ale punctului x. Pentru a integra funcția $f(x)$ pe întreg spațiul putem integra mai întîi pe razele ce pornesc din punctul $x = 0$ iar apoi integrăm rezultatul obținut pe suprafața Γ.

Anume

$$(2) \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma \left(\int_0^\infty f(\alpha y)\alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha \right) \omega(y) = \operatorname{Res} \int_0^\infty f(\alpha x)\alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha \,*$$

Formula (2) poate fi considerată ca formula trecerii la coordonate polare generalizate sub semnul integral.

Reziduul unei distribuții omogene în spațiul complex îl definim prin analogie cu cazul real. Anume, fie dată funcția omogenă $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$, cu grad de omogenitate $(-m, -m)$, adică verificînd

$$f(\alpha z) = \alpha^{-m}\overline{\alpha}^{-m} f(z),$$

* Această formulă rezultă direct din diferențierea relației

$$\mathrm{d}x = \alpha^{m-1}\,\mathrm{d}\alpha\omega(y).$$

pentru orice număr complex $\alpha \neq 0$. Presupunem de asemenea, că funcția $f(z)$ este continuă peste tot, excepînd originea. Introducem forma diferențială

$$(3) \qquad \omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{k-1}\mathrm{d}z_{k+1} \ldots \mathrm{d}z_m.$$

Reziduul funcției omogene $f(z)$ cu grad de omogenitate $(-m, -m)$ este prin definiție expresia următoare:

$$(4) \qquad \operatorname{Res} f(z) = \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_\Gamma f(z)\omega\overline{\omega}.$$

Integrala este calculată pe o suprafață arbitrară Γ, ce are proprietatea că taie orice dreaptă complexă ce trece prin origine într-un singur punct (cu excepția eventuală a unei mulțimi de drepte de dimensiune inferioară) *. Se poate arăta că nu există suprafețe mărginite avînd proprietatea de mai sus. De aceea suprafața Γ va consta, în general, dintr-un număr finit de porțiuni de suprafețe netede. Să arătăm cum se construiește o astfel de suprafață.

Descompunem spațiul complex într-un număr finit de conuri C_i „cu deschidere suficient de mică", cu vîrful în origine (adică în domenii ce conțin odată cu un punct z și întreaga dreaptă complexă ce trece prin origine și prin punctul z). În fiecare con C_i dăm o secțiune Γ_i, adică o bucată de hipersuprafață ce taie orice dreaptă din C_i ce trece prin origine, într-un singur punct. Atunci drept Γ putem lua familia tuturor secțiunilor Γ_i Astfel,

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_\Gamma f(z)\omega\overline{\omega} = \sum_i \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_{\Gamma_i} f(z)\omega\overline{\omega}.$$

Să remarcăm că integrala (4) nu depinde de alegerea „suprafeței" Γ (mai precis, ea nu depinde de modul în care a fost descompus spațiul în conuri cu vîrful în origine, nici de modul în care au fost alese secțiunile în aceste conuri). Într-adevăr, integrandul $f\omega\overline{\omega}$ are grad de omogenitate (0, 0) adică nu se modifică atunci cînd se schimbă z în αz, $\alpha \neq 0$. Prin urmare $\int f\omega\overline{\omega}$ nu se va modifica la nici o deformare a suprafeței Γ.

* Subliniem că în spațiul complex noțiunea de rază ce aparține unei drepte complexe nu există. De aceea, spre deosebire de cazul real, în definiția reziduului figurează drepte și nu raze.

Forma diferențială $f(z)\omega\overline{\omega}$ fiind invariantă de schimbarea lui z cu αz, unde $\alpha \neq 0$, ea poate fi considerată ca o formă diferențială, dată pe spațiul dreptelor complexe ce trec prin origine. La fel, integrala (4) se poate considera ca o integrală pe spațiul proiectiv al tuturor dreptelor complexe, ce trec prin originea coordonatelor.

Să remarcăm următoarea proprietate a formei diferențiale

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{k-1}\mathrm{d}z_{k+1} \ldots \mathrm{d}z_m.$$

Dacă $z = \alpha u$, unde α este o variabilă complexă și u un punct al unei anumite suprafețe analitice Γ, atunci

$$\mathrm{d}z \equiv \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_m = \alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha\omega(u) \text{ *}. \tag{6}$$

Se obține de aici o formulă utilă de trecere de la coordonatele carteziene $z_1, \ldots, z_m$ la coordonate polare generalizate. Anume, vom considera numărul complex α și punctul u al suprafeței Γ drept coordonatele polare generalizate ale punctului $z = \alpha u$. Vom avea:

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int \varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = \operatorname*{Res}_{z} \frac{\mathrm{i}}{2} \int \varphi(\alpha z)\alpha^{m-1}\overline{\alpha}^{m-1}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\overline{\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2+1}}{2^m} \int_{\Gamma} \left(\int \varphi(\alpha u)\alpha^{m-1}\overline{\alpha}^{m-1}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\overline{\alpha} \right) \omega\overline{\omega}. \tag{7}$$

Observație. Noțiunile de funcție omogenă și de reziduu al unei funcții omogene pot fi introduse nu numai pentru funcții definite pe întreg spațiul, ci și pentru funcții definite pe o suprafață conică cu vîrful în origine. (O suprafață se numește conică dacă odată cu un punct z conține toată dreapta complexă, ce trece prin origine și prin punctul z).

6. *Distribuții omogene cu grad de omogenitate* $(-m, -m)$. Să considerăm o funcție omogenă $f(z)$ cu grad de omogenitate $(-m, -m)$ adică verificînd, pentru orice $\alpha \neq 0$

$$f(\alpha z) = \alpha^{-m}\overline{\alpha}^{-m} f(z),$$

* Într-adevăr, $\mathrm{d}z \equiv \mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_m = \prod(\alpha\mathrm{d}u_i + u_i\mathrm{d}\alpha) = \alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha\omega(u)$, căci $\mathrm{d}u_1, \ldots \mathrm{d}u_m = 0$.

m fiind dimensiunea spațiului. Vom presupune că funcția $f(z)$ este peste tot continuă, cu excepția punctului $z = 0$. Pentru a defini distribuția ce-i corespunde și totodată regularizata integralei divergente

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int f(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z},$$

alegem un domeniu mărginit arbitrar G, conținînd originea și punem

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int f(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int_{G} f(z)[\varphi(z) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} +$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int_{C-G} f(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}, \tag{1}$$

unde prin C am desemnat întreg spațiul (și astfel $C - G$ este complementara domeniului G). Regularizata integralei

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int f(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z},$$

definită astfel, depinde desigur de alegerea domeniului G.

Vom nota distribuția obținută astfel prin $f(z)|_G$ și vom studia cum depinde această distribuție de domeniul G. Se vede imediat că înlocuind pe G cu $G_1 \subset G$, funcționala se va modifica cu

$$\varphi(0)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int_{G-G_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

Prin urmare,

$$f|_G - f|_{G_1} = \delta(z)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int_{G-G_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}. \tag{2}$$

Constatăm că diferența $f|_G - f|_{G_1}$ este o distribuție omogenă cu grad de omogenitate $(-m, -m)$. Din acest motiv, omogenitatea sau neomogenitatea distribuției definită de formula (1) nu depind de alegerea domeniului G.

Să vedem acum în ce condiții, distribuția definită de formula (1) va fi omogenă cu grad de omogeneitate $(-m, -m)$, adică verifică condiția

$$\left(f, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = (f, \varphi(z)).$$

Vom arăta că o condiție necesară și suficientă este ca reziduul funcției omogene f să fie nul.

Demonstrație. Efectuînd schimbarea de variabile $\frac{z_k}{\alpha} = z'_k$, obținem:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int_G f(z)\left[\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right] dz\, d\bar{z} + \left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{C-G} f(z)\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz\, d\bar{z} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{\alpha G} f(z)[\varphi(z) - \varphi(0)]\, dz\, d\bar{z} + \left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{C-\alpha G} f(z)\varphi(z)\, dz\, d\bar{z},$$

unde am notat cu αG domeniul ce se obține din domeniul G printr-o dilatare de coeficient α. Se vede de aici că, pentru a avea omogenitatea distribuției $f_{|G}$ este necesar și suficient ca,

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{G-\alpha G} f(z)\, dz\, d\bar{z} = 0,$$

pentru orice α. Să transformăm integrala obținută. Pentru aceasta descompunem întreg spațiul complex în conuri C_i și vom presupune că în interiorul fiecărui con frontiera domeniului G constă din toate punctele de forma

$$e^{i\varphi}u,$$

cu $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, iar punctul u parcurge o bucată Γ_i de suprafață analitică, ce taie într-un singur punct orice dreaptă complexă din C_i ce trece prin origine. Atunci, trecînd la coordonate polare generalizate, obținem:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{G-\alpha G} f(z)\, dz\, d\bar{z} =$$

$$= \sum \frac{i^{(m-1)^2+1}}{2^m} \int_{\Gamma_i} \left(\int_{|\alpha|<|\lambda|\leqslant 1} f(\lambda z)\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^{-m-1}\, d\lambda\, d\bar{\lambda} \right) \omega\bar{\omega},$$

unde

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k dz_1 \dots dz_{k-1} dz_{k+1} \dots dz_m.$$

Pentru că $f(\lambda z) = \lambda^{-m}\bar{\lambda}^{-m} f(z)$, vom avea deci

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int_{G-\alpha G} f(z)\, dz\, d\bar{z} =$$

$$= \frac{i}{2} \int_{|\alpha|<|\lambda|\leqslant 1} |\lambda|^{-2} d\lambda\, d\bar{\lambda} \sum \frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_{\Gamma_i} f(z)\omega\bar{\omega} = 2\pi \ln|\alpha| \operatorname{Res} f(z).$$

Prin urmare, *pentru ca funcției omogene $f(z)$ cu grad de omogenitate $(-m, -m)$ să-i corespundă o distribuție omogenă este necesar și suficient ca reziduul funcției $f(z)$ să fie nul.*

Vedem deci că, vorbind strict, nu este cu totul corect de a vorbi despre reziduul unei funcții omogene, așa cum se întîmplă de altfel și cu reziduul unei funcții analitice. Anume, existența unui reziduu al funcției analitice $f(z)$ este legată de faptul că distribuția corespunzătoare nu este analitică *. Similar, existența reziduului unei funcții omogene $f(z)$ este legată de faptul că distribuția corespunzătoare $f(z)$ nu este omogenă.

7. *Distribuțiile $P^\lambda\bar{P}^\mu$, P fiind o formă pătratică nedegenerată.* Fie dată forma pătratică nedegenerată de m variabile complexe, $z_1, \dots, z_m$,

$$P = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} z_i z_j. \tag{1}$$

Vom studia acum distribuția omogenă $P^\lambda\bar{P}^\mu$, adică funcționala

$$(P^\lambda\bar{P}^\mu, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int P^\lambda(z)\bar{P}^\mu(z)\varphi(z)\, dz\, d\bar{z}, \tag{2}$$

considerată funcție analitică de λ, μ (diferența $\lambda - \mu$ fiind un întreg). Remarcăm că pe suprafața $P = 0$ există un punct singular, anume $z = 0$ și deci că raționamentele făcute la pct. 2 nu mai sînt valabile aici.

* Astfel, relația $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(z^{-1}) = \pi\delta(z)$ (v. § 1, pct. 4) arată că distribuția z^{-1} nu este analitică.

Formula (2) definește pe $P^\lambda \bar{P}^\mu$ numai atunci cînd $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>0$. Să găsim expresia ce dă distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ pentru $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)<0$. Pentru aceasta, exprimăm distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ cu ajutorul distribuțiilor $P^{\lambda+k}\bar{P}^{\mu+l}$. Introducem operatorii diferențiali

$$(3)\qquad L_P = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j} \quad \text{și} \quad \bar{L}_P = \sum_{i,j=1}^{m} \bar{g}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i\,\partial \bar{z}_j},$$

în care coeficienții g^{ij} se definesc cu ajutorul relațiilor

$$\sum_{j=1}^{m} g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$$

($\delta_k^i = 1$ pentru $i=k$ și $\delta_k^i = 0$ pentru $i \neq k$). Prin urmare, matricea $\|g^{ij}\|$ a coeficienților operatorului L_P este inversa matricei $\|g_{ij}\|$ a formei pătratice. Avem atunci

$$L_P P^{\lambda+1}\bar{P}^\mu = 4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)P^\lambda \bar{P}^\mu,$$

cum se verifică direct prin calcul.

Aplicînd de k ori această formulă, obținem:

$$(4)\quad L_P^k P^{\lambda+k}\bar{P}^\mu = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{m}{2}+k-1\right)P^\lambda\bar{P}^\mu.$$

Analog

$$(5)\quad \bar{L}_P^l P^\lambda \bar{P}^{\mu+l} = 4^l(\mu+1)\ldots(\mu+l)\left(\mu+\frac{m}{2}\right)\ldots\left(\mu+\frac{m}{2}+l-1\right)P^\lambda\bar{P}^\mu.$$

Din formulele (4) și (5) obținem direct *că distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ se exprimă cu ajutorul distribuțiilor $P^{\lambda+k}P^{\mu+l}$ ($k, l = 0, 1, \ldots$), în modul următor*

$$(6)\qquad P^\lambda \bar{P}^\mu = c(\lambda, k)c(\mu, l)L_P^k \bar{L}_P^l P^{\lambda+k}P^{\mu+l},$$

unde

$$c(\nu, p) = \left\{4^p(\nu+1)\ldots(\nu+p)\left(\nu+\frac{m}{2}\right)\ldots\left(\nu+\frac{m}{2}+p-1\right)\right\}^{-1}.$$

Prin urmare,

$$(7)\qquad (P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = c(\lambda, k)c(\mu, l)(P^{\lambda+k}\bar{P}^{\mu+l}, L_P^k \bar{L}_P^l \varphi).$$

Formula (7) ne dă expresia căutată pentru distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ atunci cînd $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu) > -k-l$, k, l fiind întregi nenegativi.

Să studiem acum singularitățile distribuției $P^\lambda \bar{P}^\mu$, considerată ca funcție de λ, μ. Rezultă direct din formula (6) că *distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ are două serii de puncte singulare:*

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1), \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

și

$$(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m}{2}-k, -\frac{m}{2}-l\right), \qquad k, l = 0, 1, \ldots$$

Dacă punctul (λ, μ) aparține doar uneia din aceste serii, atunci în cel punct, distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ are un pol simplu. Dacă punctul (λ, μ) aparține simultan ambelor serii, ceea ce este posibil doar în cazul spațiului de dimensiune pară, atunci, în acest punct, distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ are un pol de multiplicitate 2.

Să studiem singularitățile lui $P^\lambda \bar{P}^\mu$ în fiecare din aceste cazuri.

1. *Punctul singular $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ aparține primei serii de puncte singulare dar nu aparține celei de a doua.* În acest caz,

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} P^\lambda \bar{P}^\mu$$

este o anumită distribuție, concentrată pe suprafața $P=0$. Știm deja că dacă f este o funcție analitică, astfel încît suprafața $f=0$ nu are puncte singulare, atunci

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} f^\lambda \bar{f}^\mu = 2\pi\frac{(-1)^{k+l}}{k!\,l!}\,\delta^{(k,l)}(f)\,*.$$

Prin analogie, este natural de a introduce distribuțiile $\delta^{(k,l)}(P)$ avînd drept suport suprafața $P=0$

$$(8)\qquad \delta^{(k,l)}(P) \equiv \frac{1}{2\pi}(-1)^{k+l}k!\,l!\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} P^\lambda \bar{P}^\mu.$$

* Reamintim că reziduul trebuie înțeles ca reziduul funcției de $s = \lambda+\mu$ pentru o valoare întreagă fixată a lui $\lambda-\mu$.

Remarcăm următoarea formulă pentru $\delta^{(k,l)}(P)$:

$$\delta^{(k,l)}(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-k-1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-l-1\right)}{4^{k+l}\Gamma^2\left(\frac{m}{2}-1\right)} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(P), \tag{9}$$

ce se obține prin recurență din formula (6), pentru $P^\lambda \bar{P}^\mu$.

2. *Punctul* (λ, μ) *aparține celei de a doua serii de puncte singulare, dar nu aparține primei*, adică

$$\lambda = -\frac{m}{2} - k, \quad \mu = -\frac{m}{2} - l,$$

și dimensiunea m a spațiului este un număr par. Arătăm că în acest caz Res $P^\lambda \bar{P}^\mu$ este o distribuție având suportul redus la punctul $z = 0$, anume,

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-\frac{m}{2}-k \\ \mu=-\frac{m}{2}-l}} P^\lambda \bar{P}^\mu = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m-2k-2l+1} \pi^{\frac{m+1}{2}}}{k!\,l!\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)|\Delta|} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(z), \tag{10}$$

unde Δ este discriminantul formei pătratice P.

Să calculăm pentru început Res $P^\lambda \bar{P}^\mu$. Este clar că Res $P^\lambda \bar{P}^\mu$ este o distribuție omogenă cu grad de omogenitate $(-m, -m)$. Să arătăm că este concentrată în punctul $z = 0$.

Într-adevăr, $z = 0$ este singurul punct singular al suprafeței $P = 0$. De aceea, dacă funcția φ se anulează identic pe o vecinătate a punctului $z = 0$, atunci, așa cum s-a arătat la pct. 2, $(P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi)$ este o funcție regulată de λ, μ în punctul $\lambda = \mu = -\frac{m}{2}$, adică

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} (P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = 0.$$

Astfel, Res $P^\lambda \bar{P}^\mu$ este o distribuție concentrată în $z = 0$. Cum, pe de altă parte, este omogenă cu grad de omogenitate $(-m, -m)$,

vom avea

$$\operatorname*{Res}_{\lambda-\mu=-\frac{m}{2}} P^\lambda \bar{P}^\mu = c_m \delta(z). \tag{11}$$

Rămîne de calculat constanta c_m. Se poate arăta că

$$c_m = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m+1} \pi^{m+1}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}, \tag{12}$$

Δ fiind discriminantul formei pătratice P.

Calculul constantei c_m. Constanta c_m este definită de relația

$$c_m \varphi(0) = \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} (P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = \operatorname*{Res}_{s=-m} (|P|^s, \varphi)$$

φ fiind o funcție test oarecare. Facem în spațiul variabilelor z o transformare liniară de variabile, care aduce forma pătratică P la forma $z_1^2 + \ldots + z_m^2$. Obținem:

$$c_m \varphi(0) = \frac{1}{|\Delta|} \operatorname*{Res}_{s=-m} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^s \varphi(z)\, dz\, d\bar{z},$$

în care Δ este discriminantul formei pătratice.

Să luăm $\varphi = e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m}$. Avem atunci

$$c_m = \frac{1}{|\Delta|} \operatorname*{Res}_{s=-m} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^s e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m}\, dz\, d\bar{z}. \tag{13}$$

Calculăm integrala

$$f(\lambda) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^{s\lambda} e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m}\, dz\, d\bar{z}; \tag{14}$$

aici m poate fi și par și impar.

Pe baza formulei $L_P P^{\lambda+1}\bar{P}^{\lambda} = 4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda}$ se obține ușor, pentru funcția $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)} f(\lambda+1). \tag{15}$$

Prin urmare,

$$f(\lambda) = 4^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{m}{2}\right) f_1(\lambda), \tag{16}$$

unde $f_1(\lambda)$ este o funcție periodică:

$$f_1(\lambda+1) = f_1(\lambda).$$

Să arătăm că de fapt $f_1(\lambda) \equiv$ const. Pentru aceasta, remarcăm, așa cum s-a stabilit deja, că funcția $f(\lambda)$ are exact aceleași singularități ca și funcția $\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)$. Rezultă de aici că $f_1(\lambda)$ este o funcție întreagă.

Să evaluăm creșterea funcției $f_1(\lambda) = f_1(\sigma+i\tau)$ pentru $|\tau| \to \infty$. Având în vedere periodicitatea funcției f_1 putem presupune că $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Funcția căutată $f_1(\lambda) = f_1(\sigma+i\tau)$ este mărginită pentru $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. De aceea, ținînd seama de bine cunoscuta formulă asimptotică pentru funcția Γ,

$$|\Gamma(\sigma+i\tau)| \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\sigma-1/2},$$ *

obținem din formula (16), că, pentru $|\tau| \to \infty$,

$$|f_1(\sigma+i\tau)| \leqslant Ce^{\pi|\tau|}. \tag{17}$$

Dar pentru o funcție întreagă $f_1(\lambda)$ de perioadă 1, o astfel de evaluare poate avea loc doar dacă $f_1(\lambda)$ este constantă (aceasta se poate vedea dezvoltînd pe $f_1(\lambda)$ în serie Laurent după puterile lui $z = e^{2\pi i\lambda}$ și considerînd comportarea lui $g(z) \equiv f_1(\lambda)$ în vecinătatea punctelor $z = 0$ și $z = \infty$). Prin urmare $f_1(\lambda) =$ const.

* v. I. M. Rijik și I. S. Gradstein, *Tabele*, pag. 322, formula (6.328).

Am stabilit deci că

$$f(\lambda) = c4^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{m}{2}\right). \tag{18}$$

Facem în egalitatea (18) $\lambda = 0$. Cum

$$f(0) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int e^{-z_1\bar{z}_1-\ldots-z_m\bar{z}_m}\, dz\, d\bar{z} = \pi^m,$$

obținem din (18)

$$c = \frac{\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Am obținut deci formula următoare:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int |z_1^2+\ldots+z_m^2|^{2\lambda} e^{-z_1\bar{z}_1-\ldots-z_m\bar{z}_m}\, dz\, d\bar{z} =$$

19)

$$= \frac{\pi^m 4^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Pentru m impar, această formulă, împreună cu formula (13) ne dă valoarea constantei c_m:

$$c_m = \frac{\pi^m}{|\Delta|} \operatorname*{Res}_{s=-m} \frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m+1}\pi^{m+1}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}.$$

Pentru calculul Res $P^{\lambda}\bar{P}^{\mu}$ pentru $\lambda = -\frac{m}{2}-k$, $\mu = -\frac{m}{2}-l$ se folosește formula de recurență (6). Obținem: *dacă dimensiunea*

m a spațiului este un număr impar, atunci distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ are în punctele $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m}{2} - k, -\frac{m}{2} - l\right)$, $k, l = 0, 1, \ldots$ *poli simpli având reziduurile*

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-k-\frac{m}{2}\\ \mu=-l-\frac{m}{2}}} P^\lambda \bar{P}^\mu = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m-2k-2l+1} \pi^{\frac{m+1}{2}}}{k!\,l!\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)|\Delta|} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(z), \tag{20}$$

unde

$$L_P = \sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}, \quad \bar{L}_P = \sum \bar{g}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j},$$

iar Δ *este discriminantul formei pătratice* P.

3. *Punctul* (λ, μ) *aparține simultan celor două serii de puncte singulare*, adică $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$, iar dimensiunea m a spațiului este un număr par. În acest caz, distribuția $P^\lambda \bar{P}^\mu$ se dezvoltă în vecinătatea punctului $\left(-\frac{m}{2} - k, -\frac{m}{2} - l\right)$ în serie Laurent (în raport cu $\lambda + \mu$):

$$P^\lambda \bar{P}^\mu = \frac{a_{kl}(z)}{((\lambda+\mu)+(m+k+l))^2} + \frac{b_{kl}(z)}{(\lambda+\mu)+(m+k+l)} + \ldots, \tag{21}$$

în care nu s-a explicitat decît partea singulară. Repetînd aproape cuvînt cu cuvînt raționamentele făcute la cazul 2, obținem că

$$a_{kl}(z) = \alpha_{kl} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(z), \tag{22}$$

unde

$$\alpha_{kl} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} 2^{-m-2k-2l+2} \pi^m}{k!\,l!\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)|\Delta|}. \tag{23}$$

Pe de altă parte, coeficientul $b_{kl}(z)$ din dezvoltarea (21) va fi o distribuție, concentrată pe suprafața $P = 0$. În analogie cu cazul în

care suprafața $P=0$ nu are puncte singulare, introducem distribuția $\delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1, \frac{m}{2}+l-1\right)}(P)$, definită de

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-\frac{m}{2}-k\\ \mu=-\frac{m}{2}-l}} P^\lambda \bar{P}^\mu = \beta_{kl} \delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1, \frac{m}{2}+l-1\right)}(P), \tag{24}$$

$$\beta_{kl} = \frac{2\pi(-1)^{k+l}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)}. \tag{25}$$

(v. cazul 1, în care am avut de-a face doar cu poli simpli).

Astfel, *dacă punctul* (λ, μ) *aparține simultan ambelor serii de puncte singulare, adică* $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$, *iar dimensiunea spațiului* m *este pară, atunci distribuția* $P^\lambda \bar{P}^\mu$ *are în acel punct un pol de ordinul 2. Dezvoltarea distribuției* $P^\lambda \bar{P}^\mu$ *în serie Laurent are în vecinătatea punctului* $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$ *forma următoare:*

$$P^\lambda \bar{P}^\mu = \frac{\alpha_{kl}}{((\lambda+\mu)+(m+k+l))^2} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(z) + \frac{\beta_{kl}}{(\lambda+\mu)+(m+k+l)} \delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1, \frac{m}{2}+l-1\right)}(P) + \ldots, \tag{26}$$

unde $\delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1, \frac{m}{2}+l-1\right)}(P)$ este distribuția concentrată pe suprafața $P = 0$, iar coeficienții α_{kl} și β_{kl} sînt definiți de formulele (23) și (25) (și unde s-a omis partea regulată a seriei Laurent).

8. *Soluția fundamentală a ecuațiilor diferențiale liniare în complex.* Vom aplica rezultatele punctului 7 la căutarea soluțiilor fundamentale ale ecuației

$$L^k u = f(z), \tag{1}$$

unde L *este un operator diferențial liniar, omogen de forma*

$$L = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}, \tag{2}$$

cu matricea $\|g^{ij}\|$ simetrică și de rang maxim, $k = 1, 2, \ldots$

Reamintim că numim soluție fundamentală a ecuației (1) o distribuție K cu proprietatea că:

$$L^k K = \delta(z).$$

Considerăm forma pătratică

$$P = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} z_i z_j, \tag{3}$$

a cărei matrice este inversa matricii operatorului L. Arătăm că, *exceptînd cazul în care dimensiunea m a spațiului este pară și $k < \frac{m}{2}$*, *distribuția $P^{-\frac{m}{2}+k}\bar{P}^{-\frac{m}{2}}$ este, cu aproximația unei constante multiplicative, o soluție fundamentală a ecuației $L^k u = f(z)$.*

Pentru demonstrație vom utiliza relația stabilită la pct. 7 (v. pct. 7, formula (4)),

$$L^k P^{\lambda+k}\bar{P}^{\lambda} = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{m}{2}+k-1\right)P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda}. \tag{4}$$

Dacă dimensiunea spațiului este un număr impar, atunci pentru $\lambda = -\frac{m}{2}$ obținem din (4)

$$L^k P^{-\frac{m}{2}+k}\bar{P}^{-\frac{m}{2}} = 4^k\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda}. \tag{5}$$

Dar, pentru m impar:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^{\lambda}\bar{P}^{\mu} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{-m+1}\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z) *$$

* vezi observația de la pag. 479

în care Δ este discriminantul formei pătratice P. Prin urmare, în cazul spațiului cu un număr impar de dimensiuni, distribuția

$$K = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+k}2^{m-2k}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-k\right)|\Delta|}{\pi^{m+1}(k-1)!}\,P^{-\frac{m}{2}-k}\bar{P}^{-\frac{m}{2}} \tag{6}$$

este o soluție fundamentală a ecuației (1).

Dacă dimensiunea m a spațiului este un număr par, și $k \geqslant \frac{m}{2}$, obținem din (4), pentru $\lambda = -\frac{m}{2}$

$$L^k P^{-\frac{m}{2}+k}\bar{P}^{-\frac{m}{2}} =$$

$$= 4^k(-1)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{m}{2}-1\right)!\left(k-\frac{m}{2}\right)!(k-1)!\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2 P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda}.$$

Dar în spațiul cu un număr m par de dimensiuni avem:

$$\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2 P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}2^{-m}\pi^{m}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z).$$

Prin urmare, în cazul spațiului cu un număr par de dimensiuni m și pentru $k \geqslant \frac{m}{2}$ distribuția

$$K = \frac{2^{m-2k}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}{\pi^{m}(k-1)!\left(k-\frac{m}{2}\right)!}\,P^{-\frac{m}{2}-k}\bar{P}^{-\frac{m}{2}} \tag{7}$$

este o soluție fundamentală a ecuației (1). Afirmația a fost demonstrată.

Să considerăm acum cazul excepțat, anume atunci cînd dimensiunea spațiului este un număr par și $k < \frac{m}{2}$. După cum s-a arătat la pct. 7, distribuția $P^{\lambda+k}\bar{P}^{\mu}$ are în acest caz, pentru $\lambda = \mu = -\frac{m}{2}$ un pol simplu și

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^{\lambda+k}\bar{P}^{\mu} = \frac{2\pi(-1)^k}{\left(\frac{m}{2}-k-1\right)!\left(\frac{m}{2}-1\right)!}\,\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\,\frac{m}{2}-1\right)}(P). \tag{8}$$

Înmulțind ambii membri ai egalității (4) cu $2\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)$ și trecînd apoi la limită pentru $\lambda \to -\frac{m}{2}$, obținem

$$\frac{2\pi(-1)^k}{\left(\frac{m}{2}-k-1\right)!\left(\frac{m}{2}-1\right)!}\,L^k\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\,\frac{m}{2}-1\right)}(P) =$$

$$= 2^{2k+1}\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2 P^{\lambda}\bar{P}^{\lambda} =$$

$$= 2^{2k+1}\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\,\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}2^{-m}\pi^m}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z).$$

Astfel, în cazul de excepție, adică atunci cînd m-dimensiunea spațiului este pară și $k < \frac{m}{2}$ soluția fundamentală a ecuației (1) este o distribuție concentrată pe suprafața $P = 0$:

$$K = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-2k}|\Delta|}{\pi^{m-1}(k-1)!}\,\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\,\frac{m}{2}-1\right)}(P). \tag{9}$$

Observație. Considerații analoage permit ușor obținerea soluției fundamentale a ecuației:

$$L^k\bar{L}^l u = f(z),$$

unde $L = \sum g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^j}$, $\bar{L} = \sum \bar{g}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^i \partial \bar{z}^j}$, $k, l = 1, 2, \ldots$ Lăsăm aceasta în seama cititorului.

9. *Studiul distribuției $G^{\lambda}\bar{G}^{\mu}$* (cazul general). Fie $G(z_1, \ldots, z_m)$ o funcție analitică întreagă. Considerăm distribuția $G^{\lambda}\bar{G}^{\mu}$:

$$(G^{\lambda}\bar{G}^{\mu}, \varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int G^{\lambda}(z)\bar{G}^{\mu}(z)\varphi(z)\,dz\,d\bar{z} \tag{1}$$

ca funcție analitică de λ, μ. Cazul cel mai simplu, cînd suprafața $G = 0$ nu are puncte singulare, a fost deja considerat (v. pct. 2). Vom considera acum cazul cînd suportul $G = 0$ poate avea puncte singulare.

Nu vom cerceta cazul cînd $G(z) = 0$ este arbitrar, ci ne vom restrînge la cazul important cînd suprafața respectivă constă numai din puncte reductibile. Definiția unui punct reductibil pe o suprafață analitică este analoagă celei din cazul real (v. cap. III).

Vom spune că variabilele $\zeta_1 = f_1(z_1, \ldots, z_m), \ldots, \zeta_m = f_m(z_1, \ldots, z_m)$ constituie un sistem local de coordonate într-o vecinătate U a punctului M, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

1) Funcțiile $f_i(z)$ sînt analitice în vecinătatea punctului M.

2) Jacobianul $\frac{D(\zeta)}{D(z)}$ nu se anulează în vecinătatea U.

3) Punctul M corespunde lui $\zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$.

Vom spune că funcția $G(z)$ este echivalentă unei funcții omogene în vecinătatea punctului M, dacă în această vecinătate există un sistem local de coordonate $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ față de care funcția G devine o funcție omogenă (un polinom). Convenim să alegem astfel aceste coordonate ca funcția G să depindă de cel mai mic număr posibil de variabile. Acest număr de variabile îl numim ordinul punctului M.

Este limpede că noțiunea de funcție echivalentă cu una omogenă se poate introduce și în cazul funcțiilor ce nu sînt definite pe întreg spațiul complex, ci sînt definite pe orice suprafață analitică.

Definiția punctelor reductibile ale unei suprafețe se face inductiv, după dimensiunea suprafeței. Această definiție este cu caracter local. Cu alte cuvinte, definiția unui punct reductibil este legată doar de varietatea analitică considerată și de o vecinătate oricît de mică a punctului.

Să presupunem deci că definiția punctelor reductibile pentru spații (sau pe varietăți analitice) de dimensiune inferioară lui m este deja dată. Vom numi punctul M al suprafeței $G(z_1, \ldots, z_m)=0$ reductibil, dacă există o vecinătate suficient de mică U a punctului M, astfel încît să fie verificate următoarele condiții:

1) Funcția G este echivalentă în U unei funcții omogene.

2) Fie $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ coordonate pe U, în care G este o funcție omogenă. Considerăm în U un element P de varietate analitică, cu proprietatea că orice dreaptă complexă (în sistemul de coordonate $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$) ce trece prin punctul M intersectează pe P în cel mult un punct. Atunci, intersecția oricărui astfel de P cu suprafața $G = 0$ trebuie să fie o varietate ale cărei puncte să fie toate reductibile pe P.

Introducem în vecinătatea punctului reductibil M al varietății $G = 0$ coordonate locale $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, în care funcția G devine omogenă cu grad de omogenitate k, depinzînd de $n \leqslant m$ variabile complexe. Vom spune că în acest caz punctul M este de ordinul n și de grad k.

Atribuim astfel fiecărui punct al varietății $G = 0$ două numere naturale, ordinul n și gradul k. În particular, dacă pe suprafața $G = 0$ derivatele $\frac{\partial G}{\partial z_i}$ nu se anulează simultan, atunci fiecare punct al acestei suprafețe va fi de ordinul 1 și de grad 1. Într-adevăr, în vecinătatea unui astfel de punct se poate alege drept una din noile coordonate chiar pe G.

Studiem acum singularitățile lui $G^\lambda\bar{G}^\mu$, considerată ca funcție de λ, μ în cazul în care toate punctele suprafeței $G = 0$ sînt reductibile.

Pentru a simplifica, presupunem că $G(z_1, \ldots, z_n)$ este un polinom. Este adevărată următoarea afirmație, pe care o dăm fără demonstrație.

Dacă $G(z_1, \ldots, z_n)$ este un polinom și varietatea $G = 0$ constă din puncte reductibile, atunci această varietate se poate descompune într-un număr finit de componente conexe, fiecare din acestea fiind formate din puncte de același ordin și de același grad.

*Teoremă. Fie $G(z)$ un polimon cu proprietatea că toate punctele varietății $G(z) = 0$ sînt reductibile. Atunci distribuția $G^\lambda\bar{G}^\mu$ este o funcție meromorfă de λ, μ *. Polii săi se găsesc într-un număr finit de șiruri. Anume, fiecărei componente conexe a lui lui $G = 0$, constînd din puncte de ordin n și de grad k îi corespunde o mulțime de poli ai funcționalei $G^\lambda\bar{G}^\mu$ situați în punctele*

$$(2)\quad (\lambda, \mu) = \left(-\frac{r+p}{k}, -\frac{r+q}{k}\right),\ p, q=0, 1, 2, \ldots, \lambda-\mu- \text{ întreg.}$$

* Reamintim că numerele λ, μ nu sînt arbitrare, diferența lor fiind un întreg. Teorema afirmă că $G^\lambda\bar{G}^\mu$ este o funcție meromorfă de $\lambda + \mu$, pentru orice valoare fixată a lui $\lambda - \mu$.

Dacă există două, trei sau mai multe șiruri de componente conexe ale lui G, incidente fiecare cu fiecare, și constînd din puncte de ordine diferite, iar (λ_0, μ_0) aparține la două, trei sau mai multe șiruri (2), ce corespund acestor componente, atunci în punctul (λ_0, μ_0) distribuția $G^\mu\bar{G}^\lambda$ are un pol de ordinul 2, de ordinul 3, respectiv de ordin mai mare.

Demonstrația acestei teoreme constă în esență în repetarea demonstrației teoremei corespunzătoare din cazul real (v. cap. III, § 4). Din acest motiv o vom schița doar, omițînd anumite detalii.

Presupunem că cunoaștem deja polii în raport cu $\lambda + \mu$ ai integralei

$$(1)\quad (G^\lambda\bar{G}^\mu, \varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int G^\lambda(z)\bar{G}^\mu(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z},$$

ce apar datorită punctelor de ordin inferior lui m. Este atunci suficient de a studia integrala luată într-o vecinătate oricît de mică a unui punct M de ordinul m. În vecinătatea lui M există un sistem de coordonate în care G devine un polinom omogen de grad k în m variabile. Fără a micșora generalitatea, putem presupune că $G(z)$ este el însuși un polinom omogen în z (cu $z = 0$ în punctul M).

Trecînd în (1) la coordonate polare generalizate (v. pct. 5) obținem:

$$(G^\lambda\bar{G}^\mu, \varphi) = \sum \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2+1}}{2^m} \int_{\Gamma_i} \left(\int G^\lambda(\alpha z)\bar{G}^\mu(\alpha z)\varphi(\alpha z)\alpha^{m-1}\bar{\alpha}^{m-1}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}\right)\omega\bar{\omega} =$$

$$(3)\qquad = \sum \frac{\mathrm{i}^{(m-1)^2+1}}{2^{m-1}} \int_{\Gamma_i} G^\lambda(z)\bar{G}^\mu(z)\Phi_{\lambda,\mu}(z)\omega\bar{\omega},$$

unde s-a notat

$$(4)\quad \Phi_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \alpha^{k\lambda+m-1}\bar{\alpha}^{\lambda\mu+m-1}\varphi(\alpha z)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}.$$

Integralele din (3) sînt calculate pe porțiuni Γ_i de suprafețe analitice, ce nu taie decît cel mult într-un singur punct orice dreaptă complexă ce trece prin punctul M.

Integralele (3) și (4) converg pentru $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) > 0$, iar pentru $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) < 0$ ele trebuie înțelese ca obținute prin prelungire analitică în raport cu $\lambda + \mu$. Să găsim pentru început singularitățile integralei $\Phi_{\lambda,\mu}(z)$, considerată ca funcție analitică de λ, μ. Pentru că,

dacă $z \neq 0$, funcţia $\varphi(\alpha z)$ ce figurează sub integrală este infinit derivabilă în raport cu α şi cu suport compact, putem conchide, pe baza pct. 2, că *singurele singularităţi ale integralei* $\Phi_{\lambda,\mu}(z)$ *sînt poli simpli* în punctele $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m+p}{k}, -\frac{m+q}{k}\right)$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots$ ($\lambda - \mu$ întreg).

Este evident, că, dacă (λ, μ) nu aparţine acestui şir, atunci $\Phi_{\lambda,\mu}(z)$ este o funcţie omogenă de z, continuă şi infinit derivabilă peste tot, cu excepţia originii.

Să găsim acum singularităţile integralei

$$(5) \qquad \frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_{\Gamma_i} G^\lambda(z) \bar{G}^\mu(z) \Phi_{\lambda,\mu}(z) \omega\bar{\omega}.$$

Pentru aceasta introducem funcţionala ajutătoare

$$(6) \qquad I_{\lambda,\mu;\lambda',\mu'}[\varphi] = \frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int_{\Gamma_i} G^\lambda(z) \bar{G}^\mu(z) \Phi_{\lambda',\mu'}(z) \omega\bar{\omega}.$$

Este evident că pentru $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, integrala (6) se reduce la integrala (5) şi este deci suficient de a studia singularităţile funcţionalei $I_{\lambda,\mu;\lambda',\mu'}[\varphi]$ *.

Punctele singulare ale lui $I_{\lambda,\mu;\lambda'\mu'}$ în raport cu (λ', μ') au fost găsite mai înainte. Ele sînt punctele $(\lambda', \mu') = \left(-\frac{m+p}{k}, -\frac{m+q}{k}\right)$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ Punctele singulare ale lui I în raport cu (λ, μ) pot fi generate doar de acele puncte ale suprafeţei Γ_i în care $G(z) = 0$. Prin ipoteză aceste puncte sînt reductibile şi de ordin cel mult $m - 1$. Prin urmare, în virtutea ipotezei de inducţie, cunoaştem polii funcţiei I, considerată ca funcţie de (λ, μ), precum şi multiplicităţile lor.

S-a arătat astfel că integrala (2) are, în afara polilor în (λ, μ) generaţi de punctele de ordin inferior lui n, şi alţi poli în punctele $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m+p}{k}, -\frac{m+q}{k}\right)$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$

* Această metodă, bazată pe „splitarea" variabilelor a fost utilizată în cap. III § 4.4 pentru a dovedi teoreme analoage în cazul real.

Rămîne de demonstrat afirmaţia teoremei în legătură cu multiplicitatea polilor lui $G^\lambda \bar{G}^\mu$. Această afirmaţie rezultă direct din observaţia următoare *.

Dacă $I_{\lambda,\mu;\lambda',\mu'}$, considerată ca funcţie de (λ, μ) are în $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ un pol de ordin j, iar considerată ca funcţie de λ', μ' are în $(\lambda', \mu') = (\lambda_0, \mu_0)$ un pol de ordin j', atunci $I_{\lambda,\mu;\lambda,\mu}$ are în $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ un pol de ordin cel mult $j + j'$.

Am lămurit deci natura singularităţilor distribuţiei $G^\lambda \bar{G}^\mu$ în cazul în care $G(z)$ este un polinom cu proprietatea că toate punctele suprafeţei $G = 0$ sînt reductibile.

În general, teorema demonstrată nu este adevărată dacă $G(z)$ este o funcţie întreagă arbitrară, astfel încît toate punctele suprafeţei $G = 0$ să fie reductibile.

Totuşi, repetînd argumentele de mai înainte se poate uşor arăta, că dacă $G(z)$ este o funcţie analitică întreagă, atunci are loc o aserţiune mai slabă. Anume, orice punct singular al distribuţiei $G^\lambda \bar{G}^\mu$ este întotdeauna de forma $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{r_1}{k}, -\frac{r_2}{k}\right)$, unde r_1, r_2, k sînt numere naturale. În particular, în punctele $\lambda = -1, -2, \ldots$ $\mu = 0$ distribuţia $G^\lambda \bar{G}^\mu$ va fi regulată.

Deci, *dacă G este o funcţie analitică întreagă, cu proprietatea că toate punctele suprafeţei $G = 0$ sînt reductibile, există atunci distribuţia G^{-k}*. Această distribuţie se defineşte ca fiind valoarea funcţionalei

$$(G^\lambda \bar{G}^\mu, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^\lambda(z) \bar{G}^\mu(z) \varphi(z)\, dz\, d\bar{z}$$

pentru $\lambda = -k$, $\mu = 0$.

Observaţie. În locul unei funcţii analitice $G(z)$ se poate considera de asemenea o funcţie arbitrară, continuă şi infinit derivabilă în raport cu z şi $\bar{z}$. În acest caz, definiţia unei funcţii echivalente cu una omogenă se schimbă întrucîtva. Anume, noile variabile pentru care funcţia G devine omogenă pot fi funcţii indefinit derivabile (şi nu neapărat analitice) în vechile variabile.

Dacă $G(z)$ este un polinom în z şi $\bar{z}$ astfel ca toate punctele varietăţii $G(z) = 0$ să fie reductibile, atunci pentru distribuţia $G^\lambda \bar{G}^\mu$ are loc o teoremă analoagă celei demonstrate mai sus. (Nu vom da enunţul precis al acestei teoreme).

10. *Distribuţii ce corespund funcţiilor meromorfe de m variabile complexe.* Fie dată o funcţie meromorfă $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$, adică o astfel de funcţie încît într-o vecinătate suficient de mică a oricărui

* Un raţionament analog s-a făcut la pag. 384

punct să poată fi reprezentată sub forma $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, ca raport a două funcții analitice în acea vecinătate.

Arătăm că *funcției $f(z)$ putem să-i facem să corespundă o distribuție* $F(z)$. Este firesc să cerem ca distribuția $F(z)$ să verifice următoarea condiție: dacă $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ într-o vecinătate (închisă) U, în care $p(z)$, $q(z)$ sînt analitice, atunci pentru orice funcție test $\varphi(z)$, cu suportul conținut în U, să aibă loc egalitatea

$$(F, q\varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int p(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{1}$$

Vom arăta că o astfel de distribuție $F(z)$, verificînd condiția (1) există întotdeauna. Să remarcăm că distribuția $F(z)$ este definită de condiția (1) cu aproximația unui termen F_1, ce verifică condiția

$$(F_1, q\varphi) = 0, \tag{2}$$

pentru orice funcție φ cu suport compact conținut în U. Este clar că o astfel de funcție va fi concentrată pe mulțimea punctelor singulare ale funcției $f(z)$.

Să trecem la construcția distribuției $F(z)$. Pentru început construim distribuția F_U pe subspațiul funcțiilor test $\varphi(z)$ avînd suportul conținut într-o vecinătate suficient de mică U a punctului dat z_0.

Reprezentăm funcția f sub forma unui raport

$$f(z) = \frac{p_0(z)}{q_0(z)}$$

a două funcții analitice în U. Considerînd o derivată de ordin suficient de mare a funcției $q_0(z)$ în raport cu z, obținem o funcție analitică

$$q_1(z) = \frac{\partial^k q_0(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_m^{k_m}}, \quad k = k_1 + \dots + k_m,$$

care să nu aibă zerouri în U (vecinătatea U se presupune suficient de mică). Distribuția F_U, este dată pe spațiul funcțiilor test $\varphi(z)$ avînd suportul conținut în U, de integrala convergentă

$$(F_U, \varphi) = (-1)^k \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int f(z)\overline{q_0(z)}\,\frac{\partial^k[\varphi(z)\overline{q_1^{-1}(z)}]}{\partial \bar{z}_1^{k_1} \dots \partial \bar{z}_m^{k_m}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{3}$$

Cu ajutorul distribuțiilor F_U construim acum funcționala F pe întreg spațiul funcțiilor test. Pentru aceasta, atașăm fiecărui punct z_0 o vecinătate suficient de mică U. Apoi, din familia acestor vecinătăți alegem o acoperire local finită a întregului spațiu *.

Fie $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ această acoperire. Luăm apoi o partiție a unității

$$1 = \sum_{i=1} g_i(z)$$

cu funcții infinit derivabile $g_i(z)$, suportul fiecărei $g_i(z)$ fiind inclus în vecinătatea U_i **.

Atunci, orice funcție test $\varphi(z)$ se poate scrie sub forma unei sume de funcții, fiecare avînd suportul într-o vecinătate U_i,

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(z) g_i(z).$$

(Remarcăm că pentru orice funcție cu suport compact $\varphi(z)$, această sumă conține doar un număr finit de termeni nenuli).

Definim distribuția $F(z)$ cu ajutorul formulei

$$(F, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} (F_{U_i}, \varphi g_i).$$

Este clar că funcționala F este continuă. Să arătăm că verifică și condiția (2). Într-adevăr, fie

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

într-o vecinătate (închisă) U, $p(z)$ și $q(z)$ fiind funcții analitice în U. Fie $\varphi(z)$ o funcție test avînd suportul conținut în U. Atunci, din definiția funcției F_{U_i} (formula (3)), integrînd prin părți, și simplificînd cu $q(z)$ obținem

$$(F_{U_i}, q\varphi g_i) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int p(z)\varphi g_i\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z},$$

Sumînd aceste egalități după i, găsim

$$(F, q\varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m \int p(z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

* Adică orice compact intersectează doar un număr finit de vecinătăți din acoperire.

** Construcția unei partiții de acest fel a fost dată în Anexa 1, cap. I.

ANEXA 5

MEROMORFIA FUNCȚIEI P^λ

de I. N. Bernstein și S. I. Gelfand *

În această notă se rezolvă următoarea problemă:
Fie $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polinom cu coeficienți reali, $\varphi(x)$ o funcție test pe $\mathbf{R}^n$ (adică o funcție indefinit derivabilă cu suport compact). Considerăm integrala

$$I(\lambda) = \int_{R^n} |P(x)|^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Integrala converge absolut pentru $\mathrm{Re}\lambda > 0$ și este o funcție analitică de λ. Trebuie demonstrat că $I(\lambda)$ se prelungește în întreg planul complex ca o funcție meromorfă de λ. Această problemă a fost pusă de I. M. Gelfand la Congresul de la Amsterdam. Ea a fost rezolvată pentru diferte clase de polinoame (v. [1]). I. M. Gelfand a exprimat presupunerea că s-ar putea obține soluția acestei probleme pentru un polinom arbitrar utilizînd rezultatele lui H. Hironaka privind rezoluția singularităților. Și într-adevăr, așa cum se arată în această notă, soluția problemei referitoare la P^λ rezultă ușor din rezultatele lucrării [2]** (Metode analoage sînt folosite în [1], Cap. 3, § 4).

Fie X o varietate algebrică de dimensiune n, dată de ecuații cu coeficienți reali, $X_\mathbf{R}$, respectiv $X_\mathbf{C}$ mulțimea punctelor sale reale, respectiv complexe.

În cele ce urmează vom presupune $X_\mathbf{C}$ nesingulară și ireductibilă, $X_\mathbf{R}$ nevidă. Vom numi funcție regulată orice funcție rațională P pe X cu coeficienți reali, cu proprietatea că P este regulată pe $X_\mathbf{C}$. Mulțimea zerourilor unei astfel de funcții o vom nota $Z(P) \cdot Z(P) = \{x \in X_\mathbf{C} \mid P(x) = 0\}$.

Lema 1. Dacă P este o funcție regulată pe X, atunci există o varietate $\hat{X}$ și o aplicație dată de funcții cu coeficienți reali, $\pi : \hat{X} \to X$, astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții:

1. $\hat{X}_\mathbf{C}$ este nesingulară, ireductibilă.
2. π este o aplicație proprie, adică imaginea inversă a oricărui compact este compactă.

* Această notă a fost publicată în Funcționalnii analiz i ego prilojenoe, t. 3, nr. 1. 1969, pag. 84–85.

** O demonstrație similară a fost obținută independent de M. Atiyah în [3] (Nota trad.).

3. În afara zerourilor polinomului P, π este un izomorfism:
$\pi : \hat{X}_\mathbf{C} \setminus Z(\hat{P}) \simeq X_\mathbf{C} \setminus Z(P)$, unde $\hat{P} = \pi^*(P)$.

4. Pentru orice punct $x \in \hat{X}_\mathbf{C}$ există funcții raționale cu coeficienții reali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ și Q, astfel ca
a) $y_1(x) = \ldots = y_n(x) = 0$, $Q(x) \neq 0$;
b) diferențialele $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$ sînt liniar independente în punctul x (adică $y_1, \ldots, y_n$ sînt parametri locali în jurul punctului x);
c) $P = y_1^{a_1}, \ldots, y_n^{a_n} \cdot Q$ unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt întregi nenegativi.
Aceasta rezultă din rezultatele lui H. Hironaka (v. [2], Cap. 0, § 5., corolarul 3).

Lema 2. Fie $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \mu)$ o funcție test pe $\mathbf{R}^n$ fiind o funcție meromorfă de parametrul μ. Atunci funcția

$$I(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^{\lambda_1} \ldots |x|^{\lambda_n} \varphi(x, \mu) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

se prelungește analitic pentru toate valorile $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ca funcție meromorfă de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$ și polii săi diferiți de polii care sînt deja poli ai funcției $\varphi(\mu)$ pot fi situați doar pe hiperplane de forma $\lambda_i + s = 0$, unde s sînt numere naturale impare.

Această afirmație se reduce prin integrări repetate la cazul $n = 1$, care a fost considerat în [1], Capit. 1, § 3.

Teorema 1. Fie X o varietate, P o funcție regulată pe X, ω o formă diferențială regulată de grad maxim pe X (adică o formă dată pe numerele reale și regulată pe $X_\mathbf{C}$), φ o funcție test pe $X_\mathbf{R}$. Fie forma ω nedegenerată pe $X_\mathbf{C} \setminus Z(P)$. Atunci integrala $I(\lambda) = I(X, P, \varphi, \omega; \lambda) = \int_X |P|^\lambda \varphi(x)| \omega |$, definită pentru $\mathrm{Re}\lambda > 0$, se prelungește analitic ca funcție meromorfă de λ în întreg planul complex, iar polii săi aparțin unui număr finit de progresii aritmetice de forma $a\lambda + b + s = 0$, unde $a > 0$, $b \geq 0$ sînt întregi fixați, s parcurge toate numerele naturale impare (aici $|\omega|$ este măsura pe $X_\mathbf{R}$ corespunzătoare formei ω; de exemplu pe dreaptă formei $x\mathrm{d}x$ îi corespunde măsura $|x|\,\mathrm{d}x$).

Demonstrație. Conform lemei 1 găsim aplicația $\pi : \hat{X} \to X$. Notăm $\hat{P} = \pi^*(P)$, $\hat{\varphi} = \pi^*(\varphi)$, $\hat{\omega} = \pi^*(\varphi)$. Atunci, după cum se constată ușor $\hat{X}$, $\hat{P}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$ verifică condițiile teoremei și $I(X, P, P, \varphi, \omega\lambda) = I(\hat{X}, \hat{P}, \hat{\varphi}, \hat{\omega}; \lambda)$. De aceea este suficient de a demonstra teorema pentru $\hat{X}$. Fie $x \in \hat{X}_\mathbf{R}$. Considerăm parametrii locali $y_1 \ldots y_n$,

amintiți în lema 1. Atunci, într-o anumită vecinătate a punctului x $\hat{P} = y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n} \cdot Q$ și $\hat{\omega} = S(y)\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$. Așadar, cum $S(y) = 0$ doar pe $Z(\hat{P})$, din teorema zerourilor a lui Hilbert rezultă existența unui N, astfel încît p^N să se dividă la $S(y)$. Înseamnă că $S(y) = y_1^{b_1} \dots y_n^{b_n} \cdot Q_1$ cu $Q_1(x) \neq 0$. Cu ajutorul partiției unității putem reprezenta pe $\varphi = \sum \varphi_j$, unde suportul fiecărei funcții φ_j este concentrat într-o vecinătate suficient de mică U a unui anumit punct x_j, astfel ca a) $Q(y)$ și $Q_1(y)$ să nu se anuleze pe U ; b) $y_1 \dots y_n$ să dea un izomorfism al lui U cu un anumit domeniu în $\mathbf{R}^n(y_1, y_2, \dots, y_n$, Q, Q_1 depind de punctul x_j). Atunci,

$$I(\lambda) = \sum I_j(\lambda),$$

$$I_j(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} |Y_1|^{a_1+b_1} \dots |y_n|^{a_n+b_n} |Q|^{\lambda} |Q_1| \varphi_j \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$$

și teorema rezultă din lema 2.

Teorema 2. Fie X o varietate, $P_1, \dots, P_k$ funcții regulate pe X, ω — o formă regulată, φ o funcție test pe $X_{\mathbf{R}}$. Atunci, integrala

$$I(\lambda_1 \dots, \lambda_k) = \int_{X_{\mathbf{R}}} |P_1|^{\lambda_1} \dots |P_k|^{\lambda_k} \varphi \cdot |\omega|$$

se prelungește ca o funcție meromorfă în întreg spațiul variabilelor complexe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; polii săi pot fi răspîndiți pe un număr finit de serii de hiperplane de forma $a_1\lambda_1 + \dots + a_k\lambda_k + b + s = 0$, $a_1 \dots$ $\dots, a_k, b$ numere întregi nenegative fixate, s parcurgînd toate numerele naturale impare.

Demonstrația este analoagă demonstrației teoremei 1. Trebuie, folosind o partiție a unității, să ne reducem la o vecinătate afină U, pe care $\omega = S(y)\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$ ($\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y$ — nedegenerată) și apoi să aplicăm lema 1 funcției $P = P_1 \dots P_k S$.

Observația 1. Această teoremă se generalizează ușor la cazul în care $P_1, \dots, P_k$ sînt funcții raționale arbitrare.

Observația 2. Teoreme analoage se pot demonstra pe varietăți peste orice corp local compact.

Autorii mulțumesc lui I. M. Gelfand pentru interesul acordat lucrării.

BIBLIOGRAFIE LA ANEXA 5

1 GELFAND I. M., ȘILOV G. E., *Teoria distribuțiilor*, vol. I, Fiz Mat iz, Moscova, 1959.
2 HIRONAKA, H., *Resolution of singularites*, Annals of Math. (79), 1964, pag. 109–236.
3 M. ATIYAH, *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. Pure **8**. App. Math. (1970), pag. 145–150.

ANEXA 6

UNELE ASPECTE ALE DEZVOLTĂRII TEORIEI FUNCȚIILOR GENERALIZATE

de G. Gussi

Introducere

Avînd în vedere că au trecut mai bine de 20 de ani de la apariția tratatului lui I.M. Gelfand și al colaboratorilor săi privind funcțiile generalizate, este firesc să încercăm a arăta unele dintre progresele cele mai semnificative ale teoriei în perioada ce a trecut de atunci. Vom indica, dînd definiții și unele enunțuri precise, dar fără demonstrații, a ceea ce ni se pare că este indispensabil pentru a aborda aspecte contemporane ale cercetării matematice în acest domeniu, trimițînd cititorul interesat la o bibliografie (selectivă) pentru demonstrații și dezvoltări ulterioare. Pentru a nu lungi excesiv această anexă nu vom indica decît în trecere aplicațiile cele mai importante.

În evoluția teoriei funcțiilor generalizate putem distinge două aspecte principale (care — de altfel — nu au fost independente, după cum se va vedea). Unul dintre acestea constă în încercare inițiată cu succes de Gelfand și Șilov în [0] și dezvoltată în detaliu în volumele II și III ale tratatului, de-a introduce clase cît mai largi de funcții generalizate, bine adaptate problemelor ce intervin în mod natural în diferite domenii ale matematicii, în special în studiul operatorilor diferențiali și în teoria reprezentării grupurilor.

A doua direcție constă în studiul cît mai amănunțit al distribuțiilor, sau al unor clase importante de distribuții, direcție ce a căpătat o mare amploare odată cu degajarea conceptului de spectru singular (sau front de undă) al unei distribuții (sau al unei hiperfuncții) și care a condus la ceea ce se numește astăzi analiză microlocală. Au apărut cu această ocazie aspecte geometrice importante.

Anexa de față este alcătuită din 5 paragrafe : 1. *Ultradistribuțiile* (în care se definesc clase importante de funcții generalizate și se dau unele rezultate). 2. *Introducere în teoria hiperfuncțiilor* în care se indică principalele definiții și unele rezultate legate de cea mai largă clasă de funcții generalizate localizabile (care cuprinde în particular clasele de ultradistribuții introduse de Roumieu, Beurling, Komatsu, dar care necesită argumente coomologice și utilizarea unor rezultate adînci din teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile). 3. *Microlocalizarea* introduce spectrul singular al unei distribuții și

respectiv al unei hiperfuncţii şi conţine unele exemple importante. În sfirşit, în § 4. se indică alte dezvoltări, ia în § 5 unele comentarii şi indicaţii bibliografice.

Această rapidă trecere în revistă va sublinia însă şi actualitatea volumului lui Gelfand şi Şilov, ca o excelentă introducere. Se va vedea dealtfel, influenţa puternică pe care ideile lui I. M. Gelfand au avut-o în dezvoltarea ulterioară a teoriei.

1. Ultradistribuţii şi alte clase de funcţii generalizate

După cum se ştie, I. M. Gelfand şi G. E. Şilov au aplicat consecvent următoarea idee: fiecărei probleme specifice îi corespunde o clasă anume de „funcţii generalizate", acestea fiind prin definiţie elemente ale dualului E' al unui „spaţiu fundamental"; prin spaţiu fundamental înţelegîndu-se un spaţiu vectorial topologic, ale cărui elemente, „funcţiile fundamentale" sau în terminologia actuală, funcţiile test, să fie funcţii indefinit derivabile definite pe un deschis din $\mathbb{R}^n$ şi care să verifice următoarele două condiţii:

1°. Să fie un spaţiu numărabil normat sau limită inductivă de astfel de spaţii.

2°. Convergenţa unui şir $\varphi_\nu(x)$ în topologia spaţiului fundamental respectiv să implice convergenţa punctuală a şirului de funcţii $\{\varphi_\nu(x)\}$ pe mulţimea deschisă pe care acestea sînt definite. Din motive tehnice, condiţia 1° trebuie citeodată slăbită.

Terminologia actualmente folosită este cea de ultradistribuţie. Este evident că pentru a putea dezvolta o teorie asemănătoare cu cea a distribuţiilor, trebuie impuse spaţiului de funcţii test o serie de condiţii naturale, în primul rînd de a fi invariant la operaţia de derivare aceasta din urmă fiind continuă în topologia considerată. Condiţiile se pot exprima precis astfel (Schapira [50]). Un subspaţiu vectorial $\mathcal{D}^*(\Omega)$ al lui $C_0^\infty(\Omega)$ va fi un *ultra-subspaţiu*, dacă

1) $\mathcal{D}^* \neq \{0\}$,

2) $\mathcal{D}^*$ este un ideal al algebrei de convoluţie $\mathcal{E}$,

3) $\mathcal{D}^*$ este o algebră faţă de înmulţire,

4) Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}^*$, conjugata $\bar{\varphi}$ şi $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$ aparţin încă lui $\mathcal{D}^*$; să remarcăm că 2) implică şi stabilitatea faţă de derivare.

Schapira arată că pe un ultraspaţiu există o unică topologie de spaţiu local convex făcînd continue operaţiile de convoluţie (de la $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$) de înmulţire (de la $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}^* \to \mathcal{D}^*$), de conjugare, de omotetie şi care este „suficient de naturală". (Nu explicităm această ultimă aserţiune). Dualul $(\mathcal{D}^*)'$ înzestrat cu topologia Mackey se va numi spaţiu de ultradistribuţii pe Ω.

Se vede că alegerea unui spaţiu $\mathcal{D}^*$ ce verifică condiţiile nu este banală; în particular, cerinţa ca $\mathcal{D}^* \neq \{0\}$ poate ridica probleme delicate de analiză.

În anii '60, C. Roumieu [43] şi A. Beurling [8] reuşesc să introducă spaţii interesante de ultradistribuţii. O prezentare mai generală, care cuprinde atît clasa lui Roumieu cît şi cea a lui Beurling a fost dată de H. Komatsu [31]. În continuare urmînd îndeaproape [31], vom defini aceste ultradistribuţii. Dar înainte de aceasta să remarcăm că, încă din 1958, M. Sato, bazîndu-se pe idei complet diferite, introducea noţiunea cea mai generală de funcţie generalizată localizabilă) anume noţiunea de hiperfuncţie, ce cuprinde drept cazuri particulare ultradistribuţiile lui Komatsu (şi deci şi cele ale lui Roumieu, şi Beurling).

Explicaţia faptului că, deşi avînd o noţiune extrem de generală ca cea de hiperfuncţie, se studiază astăzi diferite clase de ultradistribuţii (deci cazuri particulare de hiperfuncţii) este de natură tehnică. În toate cazurile cunoscute de ultradistribuţii se poate lucra cu transformata Fourier, eventual cu transformata Fourier-Laplace, şi există analoage ale teoremei lui Paley-Wiener, ceea ce permite utilizarea metodelor analizei armonice, lucru ce nu este posibil în general pentru hiperfuncţii. De asemenea se pot utiliza metode de spaţii vectoriale topologice.

Fie Ω un deschis în $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$. Dacă $\{M_p\}$ $p = 0,1,2,\ldots$ este un şir de numere pozitive, f se zice *ultradiferenţiabilă* de clasă $\{M_p\}$, dacă pentru orice compact $K \subset \Omega$, există constantele C şi h astfel încît:

$$(*) \quad \sup_K \|D^\alpha f\| \leqslant C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$$

Dacă $(*)$ are loc pentru *orice* h vom zice că f este de clasă (M_p), iar dacă $(*)$ are loc pentru un $h > 0$, f va fi de clasă $\{M_p\}$. În ceea ce priveşte şirul $\{M_p\}$, se impun următoarele condiţii:

1° $M_p^2 \leqslant M_{p-1} M_{p+1}$ $p = 1, 2, \ldots$ (convexitate logaritmică)

2° $(\exists)$ constantele A şi H astfel încît,

$$M_p \leqslant A H^p \min_{0 \leqslant q \leqslant p} M_q M_{p-q}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

3° $(\exists)$ o constantă A astfel încît,

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leqslant A p \frac{M_p}{M_{p+1}};$$

Cîteodată se înlocuiesc condiţiile 2° şi 3° cu

$$(2°)'\ M_{p+1} \leqslant AH^p M_p,$$

$$(3°)'\ \sum \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$$

Să remarcăm că şirul $M_p = (p!)^s$, cu $s > 1$ corespunde claselor Gervey şi verifică această condiţie.

Condiţia 2° asigură stabilitate faţă de acţiunea operatorilor ultradiferenţiali, iar 3° este o condiţie tare de necvasi-analiticitate.

Condiţia (2°)', asigură stabilitatea faţă de acţiunea operatorilor diferenţiali, iar (3°), este condiţia uzuală Denjoy-Carleman-Mandelbrojt.

Notăm cu $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ (respectiv $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ spaţiul tuturor funcţiilor ultradiferenţiabile de clasă (M_p) (respectiv $\{M_p\}$), iar cu $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ (respectiv $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$) subspaţiul lui $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ (respectiv al lui $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ al funcţiilor cu *suport compact*.

Condiţiile 1° şi 3°, ne asigură că există suficiente funcţii cu suport compact în $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$, respectiv în $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$, deci în particular că $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ şi $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ nu sînt triviale, acest lucru rezultînd dintr-o teoremă clasică a lui Denjoy-Carleman-Mardelbrojt.

Pe spaţiile $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ şi $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ se introduc topologii naturale şi se poate arăta că $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ este un dual de spaţii Frechet-Schwartz (şi deci în acest caz condiţia impusă de Gelfand-Şilov de a fi limită inductivă de spaţii numărabil normate nu mai este îndeplinită), iar $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ este o limită inductivă de spaţii Frechet-Schwartz.

Putem considera dualele $\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$, respectiv $\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$, care vor fi numite spaţiile de *ultradistribuţii* de clasă $\{M_p\}$, respectiv (M_p). $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ este exact spaţiul introdus de Roumieu, iar dacă M_p este şirul Gervey, $\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$ este spaţiul introdus de Beurling.

Spaţiile respective de funcţii test avînd partiţii ale unităţii subordonate oricărei acoperiri deschise, se poate dezvolta teoria în mod asemănător cu cea a lui Schwartz.

În particular, asocierea $\Omega \mapsto \mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ (respectiv $\Omega \mapsto \mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$) defineşte un fascicol moale, pentru care înmulţirea cu o funcţie din $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$, respectiv din $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$, defineşte un morfism de fascicole.

Dacă şirul (M_p) verifică (2°)', orice operator diferenţial de ordin finit cu coeficienţii în $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$, respectiv în $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$, dă naştere unui morfism de fascicole.

Dacă (M_p) verifică (2°)', atunci orice operator de ordin infinit $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$, al cărui coeficient verifică $|a_\alpha| \leqslant CL^{|\alpha|}/M_{|\alpha|}, |\alpha| = 0,1,\ldots$ (operator ultradiferenţial) defineşte un morfism de fascicole. Se pot da teoreme de structură pentru aceste ultradistribuţii. Anume:

1° f este o ultradistribuţie de clasă (M_p) (respectiv $\{M_p\}$) într-un deschis Ω dacă şi numai dacă pentru orice deschis G relativ compact în Ω, f se poate reprezenta sub forma

$$f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} D^\alpha f_\alpha,$$

cu f_α măsuri pe G (respectiv pe Ω) verificînd, pentru un L şi C

$$\|f_\alpha\|_{C_0(G)'} \leqslant CL^{|\alpha|}/M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0,1,2,\ldots$$

(respectiv pentru orice $L > 0$ şi un anume C).

2° f este o ultradistribuţie de clasă (M_p) (respectiv $\{M_p\}$) dacă şi numai dacă pentru orice deschis G relativ compact în Ω şi *convex* există un operator ultradiferenţial $P(D)$ de clasă (M_p) (respectiv $\{M_p\}$) şi o măsură g pe G, astfel că

$$f = P(D)\,g$$

(A se compara acest ultim rezultat cu reprezentarea uzuală a distribuţiilor ca derivate de funcţii continue).

În sfîrşit, pentru (M_p) verificînd condiţiile 1°, (2°)' şi (3°)' se obţine teoreme de tip Paley—Wiener, caracterizînd funcţiile întregi ce sînt transformatele Fourier ale funcţiilor din $\mathcal{D}^{(M_p)}$ sau din $\mathcal{D}^{\{M_p\}}$ avînd suportul într-un compact convex fixat.

Cu aceste teoreme, după cum am mai spus, se dezvoltă o teorie analoagă celei uzuale, avînd aplicaţii mai ales în studiul singularităţilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi analitici.

Iată acum o altă descriere a ultradistribuţiilor introduse de Beurling. Fie pentru aceasta o funcţie $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *continuă în origine* şi verificînd condiţia

$$0 = \omega(0) = \lim_{x \to 0} \omega(x) \leqslant \omega(\xi + \eta) \leqslant \omega(\xi) + \omega(\eta)\ (\forall \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^n).$$

Un caz particular interesant de astfel de funcţii este dat de

$$\omega(\xi) = \Omega(|\xi|) \text{ cu } \Omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+,\ \Omega(0) = 0$$

Ω crescătoare, continuă, concavă.

Spațiul funcțiilor test (notat $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}_\omega$) este mulțimea acelor $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, cu suportul compact, și astfel încît, pentru orice $\lambda > 0$

$$\|\varphi\|_\lambda = \|\varphi\|_\lambda^\omega = \int |\hat{\varphi}(\xi)|\, e^{\lambda\omega(\xi)}\, d\xi < \infty,$$

unde, ca de obicei, $\hat{\varphi}$ este transformata Fourier a lui φ.

Dacă Ω este un deschis în $\mathbb{R}^n$, atunci se definește $\mathcal{D}_\omega(\Omega)$ ca $\lim \mathcal{D}_\omega(K_\nu)$ unde $\{K_\nu\}$ este o exhaustiune cu compacți a lui Ω, iar $\mathcal{D}_\omega(K_\nu)$ desemnează subspațiul lui $\mathcal{D}_\omega$ format din toate funcțiile test avînd suportul în K_ν, fiecare $\mathcal{D}_\omega(K_\nu)$ fiind înzestrat în mod natural cu o topologie de spațiu Frechet.

Dacă se alege $\omega(\xi) = \log(1 + |\xi|)$, este ușor de arătat (via teorema lui Paley-Wiener) că $\mathcal{D}_\omega$ coincide cu $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dacă se alege $\omega(\xi) = |\xi|$ se poate constata că $\mathcal{D}_\omega$ este trivial.

Dualul $\mathcal{D}'_\omega$ este spațiul ultradistribuțiilor lui Beurling.

Echivalența celor două definiții ale lui $\mathcal{D}_\omega$ rezultă din echivalența condițiilor de creștere a derivatelor și a condițiilor de creștere la infinit a transformatelor Fourier a funcțiilor respective.

Spațiile considerate mai înainte erau obținute prin dualitate și paștiile corespunzătoare de funcții test (sau în terminologia lui Schapira-Komatsu, ultrasubspațiile respective) aveau proprietatea fundamentală de a conține funcții cu suportul oricît de mic, și, prin urmare, ultradistribuțiile considerate erau „localizabile".

Un spațiu de natură diferită a fost introdus de N. Aronszajn [1] și studiat de M. Baouendi [5]. Ceea ce îl face interesant este faptul că în acest spațiu se pot găsi soluții ale ecuației lui H. Lewy; ceea ce, după cum se știe era imposibil în distribuții și chiar în hiperfuncții.

Fie deci H operatorul căldurii în spațiul $(n+1)$ — dimensional,

$$Hu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Se notează cu $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ spațiul soluțiilor analitice ale ecuației căldurii în $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_+ = \mathbb{C}_+^{n+1}$, unde $\mathbb{C}_+ = \{x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} x > 0\}$. Spațiul $\mathcal{A}$ este înzestrat cu topologia convergenței pe mulțimile compacte. Spațiul $\mathcal{A}_n$ este un subspațiu închis al lui $\mathcal{H}(\mathbb{C}_+^{n+1})$ și are o structură de spațiu Frechet.

Aplicația $u \mapsto (u_0, u_1)$ (în care u_0, u_1 sînt datele Cauchy inițiale) $u_0(x', t) = u(x', 0, t)$ iar $u_1(x', t) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0, t)$, $(x' \in \mathbb{C}^{n-1})$ de la $\mathcal{A}_n$ la $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}_+))^2$ este un izomorfism topologic. Se poate arăta că.

dualul $\mathcal{A}'_n$ se poate considera ca un subspațiu al lui $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, deci spațiul funcțiilor test ar fi un *subspațiu* al spațiului funcțiilor întregi (căci $\mathcal{A}_n$ este reflexiv, Montel și deci $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}'_n)'$). Interpretării lui $\mathcal{A}$ ca dual îi este însă preferabilă interpretarea sa (via izomorfismul indicat mai sus) ca spațiu de *urme*.

Este ușor de arătat că $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$ (= funcționalele analitice) se scufundă în $\mathcal{A}_n$. În acest spațiu se poate studia rezolubilitatea ecuațiilor cu derivate parțiale liniare cu coeficienți polinomiali. Există și alte clase de ultradistribuții, dar ne-am mărginit a le menționa pe cele mai importante și care nu apar în volumele II și III ale tratatului Gelfand-Șilov.

2. Introducere în teoria hiperfuncțiilor

O generalizare ce prezintă o mare importanță a noțiunii de distribuție o constituie noțiunea de hiperfuncție introdusă de M. Sato [45] în 1958. Această generalizare este importantă pentru că hiperfuncțiile constituie cadrul cel mai general — și totodată cel mai natural — al noțiunii de funcție generalizată localizabilă.

M. Sato a plecat de la observația, de altfel exploatată și de alți matematicieni, că distribuțiile pot fi considerate ca valori de bord ale funcțiilor analitice.

Acest lucru se poate exemplifica ușor pe distribuțiile studiate în volumul lui Gelfand și Șilov. De pildă, formula $\delta = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right)$ poate fi interpretată astfel. Distribuția $\frac{1}{x + i0}$ este limita (în sensul teoriei distribuțiilor) a lui $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$ atunci cînd $y > 0$ tinde către 0, ceea ce vom nota prin $\left(\frac{1}{z}\right)_+$; analog $\frac{1}{x - i0} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{1}{x - iy}$, adică $\frac{1}{x - i0} = \left(\frac{1}{z}\right)_-$. În acest caz, distribuția lui Dirac apare ca valoare de bord a lui $-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\right]$.

Sau, dacă T este o distribuție oarecare cu suport compact pe dreaptă, dacă notăm cu $\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\left(T_x, \frac{1}{x - z}\right)$, $\psi(z)$ este o funcție definită și olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} T$, iar T apare ca valoarea la bord a lui $\psi(x)$, anume $\int_{\mathbb{R}} [\psi(x + i\varepsilon) - \psi(x - i\varepsilon)]\, \varphi(x)\, dx \to (T, \varphi)$, pentru $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$ pentru orice funcție test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}')$.

În general are loc următorul rezultat.

Teoremă (Martineau [37]). Fie T o distribuție pe bila de rază r,

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| \leqslant r\}$$

și fie $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$ o acoperire *finită* cu mulțimi închise a sferei S^{n-1}, astfel încît $I_\alpha \cap I_\beta$ să fie de măsură nulă și $I_\alpha \neq S^{n-1}$ pentru orice $\alpha \in I$. Fie Γ_α conul deschis a cărui polară este I_α (adică $I_\alpha = \{y \in S^{n-1} \mid <x, y> = 0$, pentru orice $x \in \Gamma_\alpha\}$. Atunci pentru orice $r' < r$ există funcții olomorfe $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ cu creștere lentă în vecinătatea lui $\mathbb{R}^n$, adică verificînd condiția $|f_\alpha(x + iy)| \leqslant \frac{C}{|y|^A}$ pe $B(0, r') + i\Gamma_\alpha$ și astfel încît restricția lui T la $B(0, r')$ să fie egală cu $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x + i0)$, unde s-a notat cu $f_\alpha(x + i0) = \lim_{y \to 0} f_\alpha(x + iy)$, $y \in \Gamma_\alpha$, limita fiind considerată în $\mathcal{D}'(B(0, r'))$. Reciproc, pentru orice funcție olomorfă cu creștere lentă limita de mai sus există în $\mathcal{D}'$.

În cazul unei singure variabile, hiperfuncțiile se introduc destul de simplu. Fie I un deschis din $\mathbb{R}$. O *vecinătate complexă* a lui I este un deschis U din $\mathbb{C}$, astfel încît 1° $I \subset U$, 2° I să fie închis în U.

Vom introduce acum următoarea relație de echivalență: dacă notăm cu $\mathcal{O}(U \setminus I)$ spațiul funcțiilor olomorfe pe $U \setminus I$, vom spune că $f_1 \in \mathcal{O}(U_1 \setminus I)$ este echivalentă cu $f_2 \in \mathcal{O}(U_2 \setminus I)$, U_1 și U_2 fiind două vecinătăți complexe ale lui I, dacă există o funcție olomorfă f pe $U_1 \cap U_2$ astfel ca $f_1 - f_2 = f$ pe $U_1 \cap U_2 \setminus I$. Cu alte cuvinte, f_1 este echivalentă cu f_2 dacă $f_1 - f_2$, a priori definită pe $U_1 \cap U_2 \setminus I$, se prelungește la o funcție olomorfă pe întreg $U_1 \cap U_2$. Este limpede că am definit astfel o relație de echivalență. Mai precis, putem lua $U_1 = U_2 = U$ și atunci putem factoriza $\mathcal{O}(U \setminus I)$ prin această relație, ceea ce revine la a face cîtul $\mathcal{O}(U \setminus I)/\mathcal{O}(U)$. Este ușor de văzut că dacă U_1 și U_2 sînt două vecinătăți complexe ale lui I, avem izomorfismul $\mathcal{O}(U_1 \setminus I)/\mathcal{O}(U_1) \sim \mathcal{O}(U_2 \setminus I)/\mathcal{O}(U_2)$, care în cazul $U_1 \supset U_2$ este indus de restricția naturală $\mathcal{O}(U_1 \setminus I) \to \mathcal{O}(U_2 \setminus I)$. Ca atare se poate defini, după Sato, $B(I) = \mathcal{O}(U \setminus I)/\mathcal{O}(U)$ *mulțimea hiperfuncțiilor* pe I, U fiind vecinătate complexă oarecare a lui I. Vom nota cu $[f]$ clasa lui f, adică hiperfuncția corespunzătoare a lui f. Ce se poate spune despre $B(I)$? Este un spațiu vectorial, dar mai mult, este un $\mathcal{A}(I)$ — modul, unde cu $\mathcal{A}(I)$ am notat spațiul funcțiilor real analitice pe I, înmulțirea cu o funcție real analitică definindu-se în mod evident. Dacă notăm cu

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } Im\, z > 0 \\ 0 \text{ pentru } Im\, z < 0 \end{cases} \text{ și } \bar{\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } Im\, z > 0 \\ -1 \text{ pentru } Im\, z < 0 \end{cases}$$

și observăm că $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ este olomorfă (fiind constantă), notînd cu $1(x) = [\varepsilon(z)] = [\bar{\varepsilon}(z)]$ obținem o injecție a lui $\mathcal{A}(I)$ în $B(I)$ prin aplicația $\mathcal{A}(x) \mapsto \mathcal{A}(x) \cdot 1(x) = [\mathcal{A}(z)\, \varepsilon(z)]$, deci aplicația conduce funcția $\mathcal{A}(x)$ în hiperfuncția egală cu $a(x)$ pentru $Imz > 0$ și 0 pentru $Imz < 0$.

Fie $\varphi \in \mathcal{O}(U \setminus I)$; vom nota cu $\varphi(x + i0) = [\varepsilon(z)\, \varphi(z)]$, cu $\varphi(x - i0) = [\bar{\varepsilon}(z)\, \varphi(z)]$ și vom avea $[\varphi(z)]_{z=x} = \varphi(x + i0) - \varphi(x - i0)$, cu alte cuvinte $[\varphi(z)]_{z=x}$ este „saltul lui φ" la traversarea lui I.

Dacă φ este analitică în întreg U, adică dacă $[\varphi] = 0$, saltul este evident nul. Hiperfuncțiile $[\varepsilon(z)\varphi(z)]$ respectiv $[\bar{\varepsilon}(z)\, \varphi(z)]$ se vor numi *valoarea la bord* corespunzînd semiplanului superior, respectiv semiplanul inferior.

Dacă dorim să trecem la cazul mai multor variabile, lucrurile se complică simțitor, mai ales datorită fenomenelor de prelungire analitică specifice în cazul mai multor variabile complexe; de pildă, orice funcție olomorfă pe $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ este de fapt olomorfă pe $\mathbb{C}^2$.

Din acest motiv trebuie găsită noțiunea convenabilă de valoare de bord, și acest lucru a fost făcut de M. Sato utilizînd argumente coomologice.

Înainte de a trece la acestea să remarcăm că plasîndu-ne în cazul unei singure variabile, dacă $I_1 \subset I_2$ sînt doi deschiși din $\mathbb{R}$, restricția $\mathcal{O}(U \setminus I_1) \to \mathcal{O}(U \setminus I_2)$ induce o aplicație $\mathcal{B}(I_1) \to \mathcal{B}(I_2)$ de restricție, care este tranzitivă. În acest mod, aplicația $I \to \mathcal{B}(I)$ definește un prefascicol pe $\mathbb{R}$, care se dovedește a fi un fascicol, *fascicolul* $\mathcal{B}$ *al hiperfuncțiilor pe* $\mathbb{R}$, mai mult, acest fascicol $\mathcal{B}$ se dovedește a fi *flasc*, adică are proprietatea că toate aplicațiile de restricție sînt surjective sau, altfel spus, că orice hiperfuncție peste un deschis se prelungește la o hiperfuncție peste întreg $\mathbb{R}$.

Pentru a vedea cum e natural de definit o hiperfuncție în mai multe variabile, să considerăm cazul simplu în care $u_1, u_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, deci reprezentate respectiv de funcțiile $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ și să încercăm să dăm un sens expresiei $u_1(x_1)\, u_2(x_2)$ considerată ca hiperfuncție de 2 variabile cu ajutorul funcției $\varphi(z_1, z_2) = \varphi_1(z_1)\, \varphi_2(z_2)$. Această funcție este olomorfă în $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ dar cum φ_1, respectiv φ_2 sînt definite modulo $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ rezultă că $\varphi(z_1, z_2)$ este definită doar modulo $\mathcal{O}(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})) + \mathcal{O}((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathbb{C})$, cu alte cuvinte $u(x_1, x_2)$ ar trebui considerat ca element al lui $\mathcal{O}((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}))/\mathcal{O}(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})) + \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathbb{C}))$. Ceea ce este remarcabil este faptul (pus în evidență de Sato) că acest cît (sau analogul său n-dimensional) are o interpretare coomologică.

Pentru aceasta sînt necesare cîteva pregătiri privind coomologia Cech relativă.

Fie $U_1 \subset U_2$ doi deschiși din $\mathbb{C}^n$ și fie $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ o acoperire deschisă relativă a perechii (U_1, U_2). Aceasta înseamnă că s-a dat o acoperire

deschisă $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I_2}$ a lui U_2 și o subacoperire deschisă $\mathfrak{U}' = (U_\alpha)_{\alpha \in I_1}$ a lui U_1 cu $I_1 \subset I_2$.

Se notează cu $C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O})$ grupul aditiv al p-colanțurilor alternate ale lui $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ cu coeficienți în $\mathcal{O}$, adică al familiilor $\varphi = (\varphi_{\alpha_0 \ldots \alpha_p})$ $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in I_2^{p+1}$, în care:

1° $\varphi_{\alpha_0 \ldots \alpha_p} \in \mathcal{O}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p})$

2° $\varphi_{\alpha_0 \ldots \alpha_p} = 0$ dacă $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in I_1^{p+1}$

3° $\varphi_{\alpha_0 \ldots \alpha_i \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} = -\varphi_{\alpha_0 \ldots \alpha_{i+1} \alpha_i \ldots \alpha_p}$ (condiția de alternare).

Se vede că singura deosebire față de cazul clasic este apariția condiției 2°.

Se definește morfismul cobord: $\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O})$ prin formula uzuală: $(\delta\varphi)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \varphi_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+1}}$, unde notația $\varphi_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+1}}$ înseamnă că indicele α_j nu apare și se obține complexul de grupuri

$0 \to C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \ldots \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \to \ldots$ (căci $\delta_0 \delta = 0$), ceea ce permite definirea grupurilor de coomologie

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) = \frac{Ker\,(C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}))}{Im(C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}' \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}))},$$

Dacă $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ este o altă acoperire relativă a lui (U_1, U_2) mai fină decît $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ (într-un sens evident pe care nu-l mai precizăm), este ușor de văzut că se obține un morfism canonic,

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \to H^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{O}).$$

Acesta permite considerarea limitei inductive

$$\varinjlim_{(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')} H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}),$$

care este prin definiție $H^p_{U_2 \setminus U_1}(\mathfrak{U}_2, \mathcal{O})$ și care, în cazul în care $U_1 = \emptyset$ coincide cu grupul $H^p(U_2, \mathcal{O})$. Pentru $H^p_{U_2 \setminus U_1}(U_2, \mathcal{O})$ se folosește cîteodată și notația $H^p(U_2 \bmod U_1, \mathcal{O})$. Conform teoremei lui Leray, dacă $H^q(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}, \mathcal{O}) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$ avem un izomorfism între

$H^p_{U_2 \setminus U_1}(U_2, \mathcal{O})$ și $H^p(U, U', \mathcal{O})$. Dar condiția $H^q(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}, \mathcal{O}) = 0$ este îndeplinită dacă U_α este un deschis de olomorfie în $\mathbb{C}^n$ pentru orice $\alpha \in I_2$, conform teoremei B a lui Cartan (un rezultat fundamental al teoriei funcțiilor analitice de mai multe variabile).

Fie acum Ω un deschis din $\mathbb{R}^n$ și U o vecinătate complexă a sa (deci un deschis din $\mathbb{C}^n$ conținînd pe Ω și astfel încît Ω să fie închis în U). Spre deosebire de cazul $n = 1$, pentru $n > 2$, existența unor astfel de vecinătăți nu este un fapt trivial; el a fost demonstrat în cazul de față de H. Cartan și în contextul general al varietăților analitice reale de H. Grauert. Prin urmare, $U \setminus \Omega$ este un deschis în U și putem considera grupurile $H^p_{U \setminus \Omega}(U, \mathcal{O})$.

Sato demonstrează următoarea teoremă

Teoremă

1) $H^p(U \bmod U \setminus \Omega, \mathcal{O}) = 0$ pentru $p \neq n$

2) Prefascicolul $\Omega \mapsto H^n(U \bmod U \setminus \Omega, \mathcal{O})$, Ω deschis în $\mathbb{R}^n$ este un fascicol flasc, denumit fascicolul $\mathcal{B}$ ale hiperfuncțiilor.

Vom utiliza notația $\mathcal{B}(\Omega) = H^n_\Omega(U, \mathcal{O})$.

O hiperfuncție apare deci ca secțiunea unui anumit fascicol, și ca atare *suportul* său va fi prin definiție suportul secțiunii respective.

Să ne întoarcem acum la problema reprezentării mai „concrete" a unei hiperfuncții.

Pentru aceasta se va utiliza izomorfismul $H^p_\Omega(U, \mathcal{O}) \simeq H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O})$ în condițiile: U deschis de olomorfie în $\mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$

Alegem acoperirea relativă $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ a lui $(U, U \setminus \Omega)$, astfel:

$$\mathfrak{U} = (U_0, U_1, \ldots, U_n), \quad U_0 = U$$

$$\mathfrak{U}' = (U_1, \ldots, U_n), \quad U_j = U \cap \{z \in \mathbb{C}^n, \; Im z_j \neq 0\} \; i = 1, \ldots, n.$$

Se verifică ușor că

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) = \{0\}$$

$$C^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n)$$

$$C^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \simeq \{\varphi = (\varphi_j)_{j=1, \ldots, n}, \varphi_j \in \mathcal{O}(U_1 \cap \ldots \cap U_{j-1} \cap U_{j+1} \cap \ldots$$

$$\ldots \cap U_n)\}$$

și că

$$\delta : C^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O}) \to C^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \mathcal{O})$$

este dat de

$$\delta(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \varphi_j.$$

Rezultă de aici că

$$\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(U_{1,\ldots,\hat{j},\ldots,n}).$$

În cazul $\Omega = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{C}^2$ se regăsește cîtul considerat mai înainte.

Dacă ținem seama de faptul că $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n$ are 2^n componente conexe, fiecare dintre acestea putîndu-se scrie sub forma

$$\mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_j = \pm 1,$$

iar Γ_σ este conul deschis definit prin

$$\Gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n, \ \sigma_j y_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\},$$

putem conchide că

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigoplus_{\sigma} \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma)) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(U_{1,\ldots,\hat{j},\ldots,n})$$

și deci orice hiperfuncție $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ poate fi reprezentată de 2^n funcții olomorfe $\varphi_\sigma \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma))$.

Alegînd altă acoperire relativă, se obține altă reprezentare. O reprezentare utilă în cele ce urmează va fi următoarea:

Se dau $n+1$ vectori $\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$, nenuli din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că semispațiile $\eta_j^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n, \ y \cdot \sigma_j > 0\}$ acoperă pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Se ia apoi acoperirea relativă $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}_1)$ a lui $(U, U \setminus \Omega)$ definită de

$$\mathfrak{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_{n+1})$$

$$\mathfrak{V}' = (V_1, \ldots, V_{n+1})$$

cu $V_0 = U$, $V_j = U \cap (\mathbb{R}^n + i\eta_j^\perp)$ $\quad (j = 1, \ldots, n+1)$.

Notînd $\Gamma_j = \eta_1^\perp \cap \ldots \cap \hat{\eta}_j^\perp \cap \ldots \cap \eta_{n+1}^\perp$,

Γ_j este un con deschis convex, și se obține că

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathcal{O}(U \cup (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j)) \Big/ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathcal{O}(V_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,\hat{j},\ldots,n+1})$$

și prin urmare orice hiperfuncție $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ poate fi reprezentată de $n+1$ funcții olomorfe $\psi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$. Fie acum Ω un deschis din $\mathbb{R}^n$, Γ un con deschis, convex în $\mathbb{R}^n$, U un deschis de olomorfie, vecinătate a lui Ω în $\mathbb{C}^n$ și în sfîrșit fie φ o funcție olomorfă în $U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)$ (vom numi mulțimile de acest tip „tuburi locale").

Vom asocia lui φ o hiperfuncție, valoarea de bord, în modul următor.

Presupunem spațiul $\mathbb{R}^n$ orientat; alegem vectorii $\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$ ca mai înainte, verificînd în plus condiția ca

Fie $$\Gamma_1 = \eta_1^\perp \cap \ldots \cap \eta_{n+1}^\perp \subset \Gamma.$$

$\psi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$, $1 \leq j \leq n+1$,
funcțiile definite de $\psi_1 = \varepsilon \varphi | \Gamma_1$ cu $\varepsilon = \pm 1$ după cum orientarea bazei $\eta_2, \ldots, \eta_{n+1}$ a lui $\mathbb{R}^n$ este pozitivă sau negativă, $\psi_j = 0$ pentru $j = 2, \ldots, n+1$.

Atunci, hiperfuncția $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ definită ca mai sus cu ajutorul celor $(n+1)$ funcții ψ nu depinde de alegerea vectorilor $\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$ și se numește *valoarea la bord a lui φ după conul Γ*; ea se notează cu $\varphi(x + i\Gamma 0)$ sau $b_\Gamma(\varphi)$. Se poate arăta că morfismul $b_\Gamma : \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)) \to \mathcal{B}(\Omega)$ este injectiv. Are loc de asemenea

Teorema. Fie Ω un deschis din $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ și U un deschis de olomorfie, vecinătate complexă a lui Ω, astfel ca $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$.

Fie de asemenea, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ conuri convexe deschise din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că dualele $\Gamma_1^\perp, \ldots, \Gamma_m^\perp$ (unde $\Gamma_k^\perp = \{\eta \in \mathbb{R}^n, \ \xi \ \eta \geq 0, \ \forall \ \xi \in \Gamma_k\}$) acoperă pe $\mathbb{R}^n$.

Există atunci funcții olomorfe $\varphi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$, $j = 1, \ldots, m$, astfel încît $f = \sum_j \varphi_j(x + i\Gamma_j 0) = \sum_j b_{\Gamma_j}(\varphi_j)$. Altfel spus, orice hiperfuncție apare ca sumă de valori la bord ale unor funcții olomorfe pe anumite tuburi locale. Merită a compara această teoremă cu teorema ce caracterizează distribuțiile ca valori la bord. În general, în vecinătatea unui punct $x_0 \in \Omega$, funcțiile φ_j nu vor fi olomorfe, căci fiecare punct din Ω este în fapt „vîrful" conului $\mathbb{R}^n + i\Gamma_j$.

Dacă notăm cu $\mathcal{A}$ fascicolul (pe $\mathbb{R}^n$) al funcțiilor analitice, și $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, atunci există $\tilde{\varphi}$ — o prelungire analitică lui φ pe o vecinătate complexă U a lui Ω (deci $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$). Are deci sens, conform

celor de mai înainte, să considerăm hiperfuncția valoare la bord $\tilde{\varphi}(x + i\Gamma_0)$, Γ fiind un con deschis convex arbitrar din $\mathbb{R}^n$.

Asocierea $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(x + i\Gamma 0)$ care duce pe $\mathcal{A}(\Omega)$ în $\mathcal{B}(\Omega)$ este injectivă și *nu depinde* de alegerea conului Γ. Am obținut astfel un morfism injectiv de fascicole $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Obținem analog un morfism injectiv de fascicole $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ dacă remarcăm că, pentru orice $T \in \mathcal{B}'(\mathbb{R}^n)$ funcția

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle T(t_1, \ldots, t_n), \frac{1}{(t_1 - z_1) \ldots (t_n - z_n)}\right\rangle \text{ aparține lui } \mathcal{O}((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^n)$$

și deci dă naștere unei hiperfuncții $f_T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, cu proprietatea că suportul lui f_T este egal cu suportul lui T, și că orice distribuție $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se descompune într-o sumă local finită de distribuții cu suport compact, $u = \sum T_j$. Proprietatea amintită a suporților arată că $\sum f_{T_j}$ va fi de asemenea local finită și deci va genera o hiperfuncție f_U pe Ω, independentă de descompunere utilizată. Se obține astfel un morfism injectiv de fascicole $\mathcal{D}' \to \mathcal{B}'$.

În ceea ce privește ultradistribuțiile studiate de Komatsu și acestea se scufundă în hiperfuncții, Komatsu [31] caracterizînd acele hiperfuncții ce corespund ultradistribuțiilor de clasă (M_p) sau $\{M_p\}$. Dacă șirul (M_p) verifică condițiile 1°, 2°, 3°, atunci, notînd cu $M^*(p) = \sup_p \log \rho^p \frac{p!M_0}{M_p}$, condiția de creștere lentă a lui Martineau este înlocuită de condiția următoare pentru $f \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma)$ (Γ fiind un con convex deschis). Pentru orice compact $K \subset \Omega$ și orice con $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ există constante L și C (respectiv pentru orice $L > 0$ există o constantă C) astfel ca

$$\sup_{x \in K} |f(x + iy)| \leqslant C \exp M^*(L|y|), \text{ pentru orice } y \in \Gamma'.$$

Dacă f verifică această condiție, hiperfuncția pe care o definește este de clasă (M_p) (respectiv $\{M_p\}$) și reciproc, dar — ca de altfel și în cazul distribuțiilor — *local*, orice ultradistribuție de clasă (M_p) sau $\{M_p\}$ poate fi reprezentată ca valori ale unor funcții olomorfe ce verifică condiția de mai sus.

Avînd noțiunea de hiperfuncție, ce operații se pot efectua cu astfel de obiecte matematice? Într-o primă fază, să remarcăm că orice hiperfuncție se poate deriva de oricîte ori (derivînd funcțiile ce o reprezintă și luînd apoi hiperfuncția ce corespunde acestor derivate). Hiperfuncțiile se pot aduna, înmulți cu funcțiile analitice, și, de asemenea important, orice hiperfuncție definită pe un deschis se poate prelungi la întreg spațiul (lucru ce nu se întîmplă cu distribuțiile). Alte aspecte importante se vor indica în paragraful 3.

Definiția coomologică dată hiperfuncțiilor ascunde în fapt un fenomen de dualitate destul de subtil, legat de fenomenul de dualitate pus în evidență de J. P Serre în analiza complexă, și remarcat de A. Martineanu [36]. În primul rînd, dacă K este un compact din $\mathbb{C}^n$ verificînd $H^p(K, \mathcal{O}) = 0$ ptr. $\forall p > 0$, se poate arăta că $H^p_K(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$, pentru orice $p \neq n$ și că $H^n_K(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \simeq H'(K)$. Aici $H'(K)$ este dualul spațiului $H(K)$, $H(K)$ fiind definit ca $\varinjlim_{U \supset K} H(U)$, iar U un deschis din $\mathbb{C}^n$, $H(U)$ fiind spațiul secțiunilor peste U al fascicolului de funcții olomorfe în U; $H(U)$ a fost notat, deasemenea și $\mathcal{O}(U)$ și este înzestrat cu o topologie naturală de spațiu Frechet-Schwartz. $H(K)$ capătă astfel o topologie de spațiu dual de Frechet-Schwartz, iar dualul său $H'(K)$ o topologie de tip Frechet-Schwartz.

Dacă K este un compact din $\mathbb{R}^n$, condițiile de anulare a coomologiei sînt automat satisfăcute, și în plus $H(K) = \mathcal{A}(K)$ ($=$ spațiul funcțiilor real analitice în vecinătatea lui K). Dacă Ω este un deschis în $\mathbb{R}^n$, spațiul $\mathcal{A}(\Omega)$ al funcțiilor real analitice pe Ω este înzestrat cu topologia — de altfel extrem de complicată — limită proiectivă de $\mathcal{A}(K)$. Rezultatul dinainte permite a se deduce ușor că $\mathcal{B}(\Omega) \simeq \mathcal{A}'(\Omega) / \mathcal{A}'(\partial\Omega)$, deci o definiție a hiperfuncțiilor obținute prin „dualitate", și care, în anumite probleme prezintă unele avantaje tehnice. Vedem deci în ce sens hiperfuncțiile reprezintă cea mai largă clasă de funcții generalizate (localizabile): ele sînt local elemente ale celui mai „mare" dual, corespunzînd „celui mai mic" spațiu „natural" de funcții test, spațiul tuturor funcțiilor analitice.

3. Microlocalizarea

Dacă este important de a avea un cadru cît mai general în care se pot considera, de pildă, soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale, sau funcții proprii (într-un sens generalizat) ale anumitor operatori, este evident că a avea posibilitatea de a determina gradul de regularitate a soluțiilor astfel obținute este cel puțin tot atît de important. Acest deziderat, era, în cazul distribuțiilor, realizat într-o oarecare măsură. Astfel, teoremele de tip Sobolev permiteau a decide din proprietăți de integrabilitate ale derivatelor pînă la un ordin dat, regularitatea (apartenența globală la o clasă $\mathcal{E}^k$ sau $\mathcal{E}^\infty$), iar teoremele de tip Paley-Wiener permiteau — din condiții de creștere la infinit ale transformatei Fourier a decide dacă o distribuție (cu suport compact — — ceea ce, via înmulțirea cu o funcție din C_0^∞ permite tratarea cazului distribuțiilor oarecare) este de clasă C^∞ (sau de clasă Gevrey de ex.). În cazul hiperfuncțiilor însă nu există pînă la Conferința lui M. Sato (1968) [46] nici o posibilitate de a-i studia singularitățile, în particular de a hotărî dacă și unde este ea analitică. Ideea funda-

mentală a lui Sato a fost de a transfera studiul regularității în fibratul cotangent, adică de „a microlocaliza". La puțin timp după aceea L. Hörmander [21] în cazul distribuțiilor și regularității C^∞ introduce noțiunea de front de undă al unei distribuții, iar ulterior [22] aceea de front de undă analitic al unei distribuții, ce permite studiul analiticității.

Pentru a face lucrurile mai clare reamintim teorema lui Paley-Wiener (în forma în care ea caracterizează funcțiile indefinit derivabile cu suport compact).

Fie T o distribuție cu suport compact în $\mathbb{R}^n$. Se știe că transformata sa Fourier $\hat{T}(\xi)$ este o funcție analitică întreagă, creșterea sa fiind legată de suportul distribuției T. În notația de mai sus, T este o funcțională regulată dată de o funcție indefinit derivabilă cu suport compact dacă și numai dacă, pentru orice $N = 1, 2, \ldots$ există o constantă C_N, astfel încît (*) $|\hat{T}(\xi)| \leqslant C_N(1 + |\xi|)^{-N}$ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Reamintim că *suportul singular* al unei distribuții este complementara celei mai mari mulțimi deschise pe care distribuția respectivă este definită de o funcție indefinit derivabilă, sau, cu o formulare mai scurtă, pe care distribuția este indefinit derivabilă; acest suport singular al unei distribuții T se notează singsupp T.

Mulțimea (închisă, eventual vidă) singsupp$T$ ne indică doar punctele în care sînt situate singularitățile, dar nu „frecvențele ξ" care le provoacă.

Dacă T nu este indefinit derivabilă, vor exista direcții $\xi \in \mathbb{R}^n$ pentru care (*) nu va fi verificată : acestea vor fi „frecvențele" ce provoacă singularitățile, și ele formează un con $\sum(T) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dacă $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ și $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ este ușor de arătat că $\sum(\varphi T) \subset \sum(T)$. De aceea, dacă T este o distribuție *oarecare* într-un deschis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pentru orice $x \in \Omega$, notăm cu $\sum_x = \bigcap_\varphi \sum(\varphi T)$ intersecția făcîndu-se după toți acei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ care nu se anulează în punctul x.

Definiție. Fie $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Spectrul singular sau frontul de undă al distribuției T, notat $WF(T)$ sau singspec T, este submulțimea închisă din $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definită prin $\{(x, \xi), x \in \Omega, \xi \in \sum_x\}$. Este ușor de văzut că proiecția pe prima variabilă a lui $WF(T)$ este chiar singsupp. Mulțimea $WF(T)$ este „conică" în a 2° variabilă adică, dacă $(x, \xi) \in WF(T)$, atunci și $(x, \lambda\xi) \in WF(T)$ pentru orice $\lambda > 0$, ceea ce permite considerarea (prin factorizarea cu $\mathbb{R}_+$) spectrului singular pe $\Omega \times S^{n-1}$.

Se poate da o definiție invariantă a spectrului singular, care să fie imediat aplicabilă distribuțiilor definite pe varietăți. Are loc însă următoarea teoremă a lui L. Hörmander [21].

Teoremă. Fie $\Omega_1 \subset R^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ doi deschiși, $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ o aplicație C^∞ și fie $N_\psi = \{(\psi(y), \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^m, {}^t\psi'(y)\xi = 0\}$ (unde ψ' este aplicația tangentă). Atunci, pentru orice $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ cu proprietatea că $N_\psi \cap WF(U) = \emptyset$ se poate defini imaginea inversă $\psi^* u$, astfel încît, dacă u este continuă, $\psi^* u = u \circ \psi$.
Mai mult, $WF(\psi^* u) \subset \{(y, {}^t\psi'(y)\xi), (\psi(y), \xi) \in WF(u)\}$.
Se deduc din acest rezultat mai multe consecințe importante, prima fiind că $WF(u)$ se poate defini ca o submulțime în fibratul cotangent $T^*(\Omega)$ dacă u este o distribuție pe varietatea Ω. Altă consecință este următoarea : dacă M este o subvarietate în Ω și dacă $N(M)$ este fibratul conormal ($\subset T^*(\Omega)$), atunci dacă $N(M) \cap WF(U) = \emptyset$ se poate defini *restricția* lui u la subvarietatea M (aplicația ψ fiind în acest caz aplicația de incluziune).

În sfîrșit, putem înmulți în anumite cazuri distribuțiile între ele (se știe că în general acest lucru nu este posibil).

Fie u_1, u_2 două distribuții definite pe Ω. Putem considera produsul tensorial $u_1 \otimes u_2$ (distribuție pe $\Omega \times \Omega$). Să presupunem acum că $WF(u_1) + WF(u_2) = \{(x, \xi_1 + \xi_2), (x_i, \xi_i) \in WF(u_i)\ i = 1, 2\}$ este inclus în $T^*(\Omega) \setminus 0$ (cu alte cuvinte $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$ pentru orice $(x, \xi_1) \in WF(u_1)$, $(x, \xi_2) \in WF(u_2)$).
Atunci produsul este definit prin $u_1 u_2 = \Delta^*(u_1 \otimes u_2)$, unde Δ este aplicația $\Omega \ni x \mapsto (x, x) \in \Omega \times \Omega$ și

$$WF(u_1 u_2) \subset WF(u_1) \cup WF(u_2) \cup (WF(u_1) + WF(u_2)).$$

Acest produs coincide, desigur, cu produsul uzual, atunci cînd u_1 și u_2 sînt funcții continue.

Din simpla enumerare a acestor cîteva proprietăți se poate vedea utilitatea noțiunii de spectru singular.

Dacă dorim însă să studiem *analiticitatea* unei distribuții, cum nu există funcții analitice cu suport compact și bineînțeles nici o teoremă de tip Paley-Wiener ca cea dată mai înainte, apar dificultăți. L. Hörmander a dat o definiție a spectrului singular analitic, sau al *frontului de undă analitic*, notat $WF_A(u)$ al unei distribuții u. Se pleacă de la observația bine cunoscută că o funcție $u(x)$ este real analitică într-un deschis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă, pentru orice compact K din Ω, există constantele C_{K, m_K}, astfel încît

$$(**) \quad \sup_K |D^\alpha u| \leqslant C_K(C_K|\alpha|)^{|\alpha| + m_K},$$

pentru orice multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
L. Hörmander arată că o distribuție $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ este real analitică în vecinătatea unui punct $x_0 \in \Omega$ dacă și numai dacă există un șir $\{U_N\}$

de distribuții cu suport compact, mărginit în $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ și o vecinătate V a lui x_0, astfel ca

1) $U_N = U$ pe V pentru $N = 1, 2, \ldots$

2) Există o constantă C astfel ca

(***) $|\hat{U}_N(\xi)| \leqslant (CN)^N (1+|\xi|)^{-N}$ pentru orice $N = 1,2, \ldots$ și $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Acest rezultat sugerează definiția următoare:

Definiție. (Hörmander [22]). $WF_A(u)$, unde $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, este complementara în $\Omega \times S^{n-1}$ a mulțimii punctelor (x_0, ξ_0) având proprietatea următoare: există o vecinătate V_0 a punctului x_0, o vecinătatea conică Γ a lui ξ_0 și un șir mărginit $\{U_N\} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, astfel încît să fie verificate punctele 1) și 2) de mai sus, (***) fiind verificată doar pentru $\xi \in \Gamma$ (și *nu* ca în 2) pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$).

Această definiție este însă relativ complicată, și nu atît de naturală ca și cea a spectrului singular. Există și alte definiții echivalente, de pildă cea dată de doi fizicieni Bros-Iagolnitzer [13] sau cea dată de Guillemin-Stenberg [19]. Pentru variante de definiții utilizînd diferite compactificări ale lui $\mathbb{R}^n$, a se vedea [23]. Pentru hiperfuncții există definiția spectrului singular, dată de Sato, pe care o vom examina, în cele ce urmează.

Fie deci Ω un deschis din $\mathbb{R}^n$ (în fapt Ω ar putea fi o varietate analitică reală oarecare!). Fiecărei funcții analitice reale φ pe Ω i se asocia hiperfuncția $\varphi(x + i\Gamma 0)$, Γ fiind un con convex deschis din $\mathbb{R}^n$, definită de prelungirea (notată încă φ) a lui φ la o funcție olomorfă pe o vecinătate complexă U a lui Ω, și considerată pe tubul local $\Omega + i\Gamma$; această asociere este independentă de alegerea conului.

Teorema de reprezentare a hiperfuncțiilor ca valori la bord de funcții olomorfe conduce la următoarea observație. Dacă $f = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x + i\Gamma_j 0)$ este o hiperfuncție pe Ω și dacă φ_j (care în general sînt olomorfe doar pe $U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j)$ cu U, Γ_j ca mai înainte) sînt olomorfe în vecinătatea lui x_0, atunci f rezultă analitică în vecinătatea lui x_0.

Aceasta sugerează următoarea definiție:

Definiție (Sato). Fie $\eta_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\eta_0 \neq 0$ și $x_0 \in \Omega$. Se spune că $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ este *micro-analitică* în vecinătatea lui $(x_0, i\eta_0)$ dacă ea se poate reprezenta sub forma:

$$f = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x + i\Gamma_j 0), \quad \varphi_j \in \mathcal{O}(U \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j)),$$

în care toate funcțiile φ_j sînt olomorfe în vecinătatea lui x_0 dacă conul Γ_j verifică $\Gamma_j \subset \{\eta_0\}^\perp = \{\xi \mid <\xi, \eta_0> \geqslant 0\}$.

În fapt, ceea ce este esențial nu este atît $\eta_0 \neq 0$ ci *direcția*, deci *semidreapta pe care acesta* o definește în $\mathbb{R}^n$, notată cu η_0^∞. Familiar vorbind, microanaliticitatea înseamnă analiticitatea pe anumite direcții.

Vectorii $i\eta$ (de fapt, ei fiind considerați ca elemente ale dualului lui $\mathbb{R}^n$ — de altfel identificat cu $\mathbb{R}^n$, astfel încît trebuie să-i numim covectori) pot fi interpretați ca elemente ale fibratului conormal al lui Ω în $\mathbb{C}^n$, fibrat notat $T^*_\Omega \mathbb{C}^n$. Fibratul conormal fiind definit pe fibre drept nucleul morfismului (de spații vectoriale)

$$T^*_x \mathbb{C}^n \to T^*_x \mathbb{R}^n,$$

dat de $(\eta_1 + i\eta_2) \mapsto \eta_1$, pentru orice $x \in \Omega$.

Factorizînd acum fibrele față de acțiunea lui $\mathbb{R}_+$ se obține $S^*_\Omega \mathbb{C}^n \simeq \simeq \Omega \times iS^* = iS^*\Omega$ (unde $S^* = (\mathbb{R}^n)^* \setminus 0/\mathbb{R}_+$), numit *fibratul în cosfere normale*. Dacă notăm cu π proiecția canonică $(x, i\eta) \to x$ de la $iS^*\Omega$ la Ω se poate da, în sfîrșit, următoarea definiție.

Definiție. Fie $f \in \mathcal{B}(\Omega)$. *Spectrul singular al lui f*, notat *SSf* este mulțimea (ce rezultă închisă) din $iS^*\Omega$ al acelor $(x, i\eta\, \infty)$ în care f *nu este microanalitică.*

Am văzut că distribuțiile pot fi considerate hiperfuncții particulare. Deci pentru $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avem simultan noțiunea de front de undă analitic, $WF_A(f)$ și de spectru singular al lui f, *SSf*. Cele două noțiuni coincid, adică $WF_A(f) = SSf$ dacă $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (demonstrația fiind nebanală [12], [10],) ceea ce confirmă naturalețea definiției de mai sus. Cu toată aparenta complicație, această definiție este mult mai naturală decît cea a frontului de undă analitic, nefăcînd să intervină noțiuni străine de analiticitate, ca cea a șirului $\{U_N\}$ din definiția frontului de undă analitic.

Mergînd mai departe M. Sato definește un fascicol, numit fascicolul microfuncțiilor analitice, pe $iS^*\Omega$. Pentru aceasta, se definește pe baza de deschiși ai lui $iS^*\Omega$ formați din mulțimile $U \times i\Gamma$ în care U este un deschis din Ω și Γ urma pe S^* a unui con convex deschis din $(\mathbb{R}^n)^*$, prefascicolul $U \times i\Gamma \to \{f \in \mathcal{B}(U),\ SSf \cap (U + i\Gamma) = \emptyset\}$, și se consideră fascicolul asociat, notat $\mathcal{A}^*$. Dacă se ține seama de definiția fascicolului imagine inversă, se constată că $\mathcal{A}^*$ se poate interpreta ca un subfascicol al lui $\pi^{-1}(\mathcal{B})$, π fiind aplicația canonică de la $iS^*\Omega$ pe Ω. Avem deci șirul exact

$$0 \to \mathcal{A}^* \to \pi^{-1}(\mathcal{B})$$

pe care îl completăm, considerînd fascicolul cît $\pi^{-1}(\mathcal{B})/\mathcal{A}^*$. Acest din urmă fascicol, notat cu $\mathcal{C}$ şi numit fascicolul microfuncţiilor verifică deci

$$0 \to \mathcal{A}^* \to \pi^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{C} \to 0 \text{ (şir exact pe } i\mathcal{S}^*\Omega).$$

Secţiunile lui $\mathcal{C}$ peste deschişi de forma $U \times i\Gamma$ sînt deci $\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}^*(U + i\Gamma)$. Dar dacă s-ar pleca de la această definiţie a secţiunilor ar fi extrem de dificil de demonstrat că avem de-a face cu un fascicol.

Au loc 2 rezultate importante.

Teoremă.

1) Fascicolul $\mathcal{C}$ este flasc.

2) Avem şirul exact (pe Ω)

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \pi_*\mathcal{C} \to 0,$$

în care $\pi_*\mathcal{C}$ este imaginea directă prin π a fascicolului $\mathcal{C}$.

Se vede de aici că $\mathcal{B}/\mathcal{A} \simeq \pi_*\mathcal{C}$, cu alte cuvinte *studiul singularităţilor este concentrat pe* $\mathcal{C}$.

Avem de asemenea, notînd cu *supp sing* $_a f$ suportul singular analitic al hiperfuncţiei f, egalitatea

$$supp sing_a f = \pi(\mathcal{S}Sf).$$

Cu ajutorul spectrului, singular putem defini — cum am făcut şi pentru distribuţii, diferite operaţii importante între hiperfuncţii, în ipoteze corespunzătoare pe care nu le mai explicităm, privind spectrul singular. Astfel, în anumite condiţii hiperfuncţiile se pot înmulţi; se poate considera restricţia unei hiperfuncţii la o subvarietate, se poate defini imaginea inversă, se poate face integrarea unei hiperfuncţii de-a lungul fibrei unui morfism (imaginea directă) etc.

Aceste proprietăţi sînt esenţiale în aplicaţii ele făcînd din hiperfuncţii obiecte matematice nu numai foarte generale, dar şi suficient de maniabile.

4. Clase importante de distribuţii

În acest paragraf vom examina pe scurt două clase importante de distribuţii. Prima clasă este cea a distribuţiilor reprezentate prin integrale oscilante, numite distribuţii Fourier — sau, cu ceea ce este probabil termenul cel mai adecvat — distribuţii lagrangiene.

Discuţia ce urmează nu este absolut riguroasă deoarece nu vom specifica întotdeauna — pentru a nu încărca prea mult expunerea — toate condiţiile impuse elementelor ce intervin în continuare.

După cum se ştie, soluţiile fundamentale ale operatorilor eliptici se pot reprezenta ca distribuţii de forma $(x, y) \to$ $\to (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-y,\,\theta\rangle}\, a(x, \theta)\, d\theta$ pentru $a(x, \theta)$ convenabilă. Calcule formale arată că pentru alţi operatori (de exemplu pentru operatorul undelor) apar expresii de forma $\int e^{i\varphi(x,\,\theta)}\, a(x, \theta)\, d\theta$ în care funcţia $\varphi(x, \theta)$ nu mai este liniară în variabila θ. Problema constă în a găsi condiţii privind pe $\varphi(x, \theta)$ „funcţia de fază") şi pe $a(x, \theta)$ („amplitudinea") care să permită să se dea un sens (ca distribuţii) unor expresii de acest fel (integralele respective nefiind absolut convergente). Expresii de acest tip erau în atenţia fizicienilor de multă vreme. S-a constatat că este util de a considera şi un parametru y, deci de a considera expresii de forma $\int e^{i\varphi(x,\,y,\,\theta)}\, a(x, y, \theta)\, d\theta$.

Definiţie. Fie $\varphi(x, y, \theta)$ definită pe $\Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, cu Ω deschis în $\mathbb{R}^n$. Se presupune că:

1) φ este cu valori reale şi de clasă C^∞ pe $\Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

2) φ este pozitiv omogenă de grad 1 în raport cu variabila θ.

3) diferenţialele $d_{x,\theta}\,\varphi$ şi $d_{y,\theta}\,\varphi$ nu se anulează pe $\Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

Atunci funcţia φ se numeşte funcţie de fază nedegenerată.

Condiţia 3) asigură că factorul $e^{i\varphi}$ oscilează rapid pentru $|\theta|$ mare, de unde şi numele de integrală oscilantă, dată expresiilor dinainte.

Dacă funcţia $a(x, \theta)$ verifică anumite condiţii naturale, se poate arăta, utilizînd integrări prin părţi repetate că $u \mapsto$ $\mapsto \int e^{i\varphi(x,\,\theta)}\, a(x, \theta)\, u(x)\, dx d\theta$ $(u \in C_0^\infty(\Omega))$ defineşte o distribuţie pe care o vom numi distribuţie Fourier, sau distribuţie lagrangiană din motive ce se vor vedea în continuare. Un rezultat analog are loc dacă apare un parametru y în funcţia de fază şi în amplitudine. Şi în acest caz aplicaţia $u \mapsto \int e^{i\varphi(x,\,y,\,\theta)}\, a(x, y, \theta)\, \varphi(x)\, dx\, d\theta$ defineşte o aplicaţie de la $C_0^\infty(\Omega)$ la $C^\infty(\Omega)$ ce se poate prelungi prin continuitate de la $\mathcal{E}'(\Omega)$ la $\mathcal{D}'(\Omega)$. Aceştia sînt operatorii Fourier integrali numiţi şi operatori Fourier-Lax-Maslov.

„Definiţia" dată este locală şi nu are un caracter geometric. Faptul remarcabil este că se poate da o caracterizare geometrică a spectrului singular al unei astfel de distribuţii. Anume, dacă $I_\varphi(a)$ este distribuţia Fourier definită de funcţia de fază φ şi de amplitudinea a şi dacă notăm cu *esssuppa* cea mai mică mulţime conică în

$\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ în afara căreia a este „foarte regulată" (omitem precizarea acestei ultime proprietăți), atunci

$$WF(I_\varphi(a)) \subset \{(x, d_x\varphi(a,\theta)) \text{ cu } (x, \theta) \in esssuppa,\ d_\theta\varphi(x, \theta) = 0\},$$

adică singularitățile lui $I_\varphi(a)$ sînt determinate de *punctele critice* ale lui φ în raport cu variabila duală θ, și bineînțeles de punctele în care $a(x, \theta)$ nu este „foarte regulată". Foarte regulat însemnînd o rapidă descreștere a derivatelor $D_\theta^\alpha a(x, \theta)$ și o creștere bine controlată a derivatelor $D_x^\beta a(x, \theta)$.

Dar și mai remarcabil este faptul că varietățile de forma $\{x, d_x\varphi(x, \theta), d_\theta\varphi(x, \theta) = 0\}$ considerate ca subvarietăți în fibratul cotangent $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ sînt ceea ce se numește varietăți lagrangiene și că fiecărei varietăți lagrangiene scufundată în fibratul cotangent i se poate asocia un operator Fourier. Aceasta permite definirea globală a acestor operatori și are o importanță fundamentală în evoluția ulterioară a teoriei asupra cărei nu este locul de a insista aici.

Considerente geometrice asemănătoare apar și în studiul hiperfuncțiilor.

Să remarcăm că aceste considerente geometrice permit definirea operatorilor Fourier pe varietăți. În sfîrșit să amintim că V. Guillemin și S. Sterberg în [19] au dat o prenzentare extrem de elegantă a teoriei plecînd de la o famlie de distribuții pe $\mathbb{R}^1$, în speță de la distribuțiile $(x + i0)^\lambda$ din care, prin operații de imagine inversă, imagine directă, înmulțire cu o funcție se pot obține toate distribuțiile lagrangiene. În această ultimă prezentare influența ideilor lui I. M. Gelfand este evidentă.

Altă clasă importantă de distribuții sînt cele introduse de I. N. Berstein, un strălucit elev al lui Gelfand.

Menționăm că între altele, Bernstein a reușit să dea o demonstrație a existenței soluției fundamentale a unui operator liniar cu coeficienți constanți fără a utiliza teorema lui Hironaka de rezoluția a singularităților.

Această demonstrație se bazează pe posibilitatea prelungirii la o funcție meromorfă în întreg planul cu valori distribuții a lui $\mathcal{P}^\lambda$ definită de $\langle \mathcal{P}^\lambda, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int P^\lambda(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$, pentru $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ și pentru $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, obținîndu-se în final o distribuție temperată ca soluția ecuației $P(-D)\, u = \delta$. Această distribuție aparține de fapt clasei de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, introduse de Bernstein pe care o definim în cele ce urmează.

Ideea remarcabilă a lui Bernstein atunci cînd a introdus clasa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a fost de a studia distribuțiile respective în legătură cu ecuațiile diferențiale pe care acestea le verifică, ideea apărută independent la

M. Sato și dezvoltată de strălucitul său elev M. Kashiwara. Ne vor fi necesare unele definiții algebrice.

Dacă K este un corp comutativ de caracteristică 0 se notează cu $A_n(K)$ algebra Weyl a operatorilor diferențiali peste K cu coeficienți polinominali. Fie M un $A_n(K)$ modul stîng înzestrat cu o filtrare Γ. Se zice că filtrarea Γ este „bună" dacă graduatul asociat $gr_\Gamma(M)$ este un $gr(A_n(K))$ — modul de tip finit. Dacă $d(M)$ este dimensiunea lui M, Bernstein a demonstrat că $d(M) \geqslant n$ pentru orice $A_n(K)$ —modul stîng netrivial. Clasa lui Bernstein de $A_n(K)$ — module stîngi este clasa acelor module M pentru care $d(M) = n$. Să ne întoarcem la distribuții. Este imediat că $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ este un $A_n(\mathbb{C})$ — modul stîng. Fie $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ și fie $L_u = \{Q \in A_n(\mathbb{C}), Q(x, D)\, u = 0\}$ anulatorul lui u, adică mulțimea acelor operatori diferențiali cu coeficienți polinomiali ce anulează pe u. Prin definiție $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dacă și numai dacă $An(\mathbb{C})/L_u$ (care este un $A_n(\mathbb{C})$— modul stîng) aparține clasei lui Bernstein, adică dacă $d(A_n(\mathbb{C})/L_u) = n$

Cîteva proprietăți importante ale lui $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: 1° $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ este un $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ — submodul al lui $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2) o distribuție temperată aparține lui $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. dacă și numai dacă transformata sa Fourier aparține lui $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3) În $\mathcal{S}'$ se poate face un calcul operatorial.

Ne oprim aici cu aceste sumare considerente privind clasa distribuțiilor lui Bernstein.

6. Comentarii și indicații bibliografice

Din cele precedente rezultă destul de clar progresele însemnate ale teoriei funcțiilor generalizate. Este însă cazul că subliniem rolul pe care ideile lui Gelfand le-au jucat în aceste progrese. În cazul ultradistribuțiilor acest lucru este evident, dar chiar în cazul hiperfuncțiilor, deși definiția acestora se bazează pe alte idei, anumite hiperfuncții ca de pildă $|x|^\lambda$, x_+^λ, $(x + i0)^\lambda$ etc. (deci de fapt distribuții studiate în volumul de față) joacă un rol important. Mai însemnat însă este rolul pe care îl au distribuțiile ce depind de parametri în mod analitic. Și aici cititorul tratatului lui Gelfand este în măsură să recunoască idei dezvoltate sistematic pentru prima dată în acest volum. Subliniem de asemenea, rolul însemnat pe care îl au diferitele descompuneri ale măsurii Dirac în unde plane.

În altă ordine de idei trebuie menționat că expunerea de față nu are un caracter exhaustiv. Astfel, o clasă interesantă de distribuții a fost pusă în evidență de Jaffe [24] în legătură cu probleme ale fizicii teoretice. Clase interesante de ultradistribuții au fost introduse și studiate de Chou [14] și I. Ciorănescu — L. Zsido [15].

Pentru detalii, bibliografie și aplicații în acest domeniu trimitem la [34]. În ceea ce privește ultradistribuțiile lui Beurling și aplicațiile acestuia a se vedea [9].

Pentru o inițiere rapidă în teoria „elementară" a hiperfuncțiilor (stadiul dinainte de 1968) a se vedea cursul lui Schapira [49]. Pentru detalii privind valoarea la bord, [37]. Conferințele lui M. Sato de la Tokio, respectiv Nisa [46], [47] dau unele exemple de calcul de spectru singular. Lucrarea fundamentală în care sînt studiate și aplicate fascicolul microfuncțiilor, spectrul singular etc. este [48]. În același volum se găsesc alte expuneri interesante : Komatsu [33] și Morimoto. O prezentare „axiomatică" dar cu multe aplicații îl constituie cursul lui Bony [11]. O altă introducere bazată pe [48] este cea a lui Kashiwara [27]. O prezentare din care ne-am inspirat mult este [53]. Probabil că cel mai bun text introductiv cu demonstrații complete este cursul de la Grenoble a lui A. Kaneko [26].

Pentru studiul acelor hiperfuncții pentru care se poate defini transformata Fourier a se vedea Kawai [28] și nota lui Palamodov [54]. Diferite compactificări ale lui R^n dau posibilitatea de a defini în diferite moduri spectrul singular. A se vedea [23] Echivalența frontului de undă analitic cu spectrul singular al unei distribuții este demontrată de mai mulți autori. A se vedea cartea lui Bjorck [10], Nishiwada Bony [12]; [10] conține și o excelentă introducere la aspectele mai avansate legate de problemele microlocale în studiul sistemelor. Tot acolo se găsește și o prezentare a distribuțiilor lui Bernstein și aplicațiile lor.

În ceea ce privește distribuțiile lagrangiene, operatorii integrali Fourier și aplicațiile lor există o literatură bogată. Recomandăm articolele [21], [23] ale lui L. Hőrmander, [18] Duistermaat-Hőrmander, cursul lui Duistermat [16] și volumul deja amintit a lui Guillemin-Sternberg [19]. De asemenea o prezentare excelentă cu numeroase aplicații importante o constituie lucrarea în 2 volume a lui Treves [52].

Pentru studiul sistemelor supradetermniate din punctul de vedere a lui Sato-Kashiwara a se vedea cursul lui P. Schapira [51] și mai ales volumul lui Pham [42].

Aplicații importante ale teoriei hiperfuncțiilor se pot găsi rezumate în volumul [53]. Transformarea Radon pentru hiperfuncții este studiată în teza lui Kataoka [29] care apoi o aplică în studiul problemelor la limită [30].

Pentru alte aplicații în fizica teoretică a se vedea [58] [59], iar pentru legătura ca funcțiile de clasă Nilsson a se vedea conferința lui Pham [41]. Recomandăm de asemenea articolul lui Duistermat [17] și cursul lui Pham [40] în care se studiază aspecte geometrice și topologice legate de vaietățile lagrangiene.

Aici trebuie subliniat rolul important jucat de Maslov și de Arnold [2]. A se vedea și [55], [56].

Pentru diferite generalizări ale noțiunii de hiperfuncții a se vedea Morimoto [39] și Jarinov [25].

BIBLIOGRAFIE LA ANEXA 6

[0]. I. M. Gelfand. G. E. Șilov *Prebrazovanua Fourier bistro rastușcih funcții u vopro edinstrenostu zadaci Cauby, Usp. Mat. Nauk 8*, 6, 1953.

[1] N. Arouszajn — *Traces of analytic solutions for the heat equation*, Astérique 2—3, pag. 35—68, 1973.

[2] V. I. Arnold — *O haracteriscescom classe vhodeașciem v uslovie kvantirovania*, Funk. Analiz. ii priloj. 1, 1967, 1—13.

[3] V. I. Arnold Usp. Mat. Nauk, 1975, XXX, 5(185)

[4] V. I. Arnold — *Integralt bistro oscillininsdh funcții*, Funk. Analiz. ii proloj. 7, 3, 1972, 61—62.

[5] M. Baouendi — *Solvability of partial differential equation in the traces of analytic solutions of the heat equation*, American J. of Math. XCVII, nr. 4, pag. 983—1005, 1975

[6] I. N. Berstein — *Moduli nod coltom diferențialnh operatorih*, Funk. Analiz. t. 5, Nr. 2, pag. 1—16, 1971.

[7] — *Analiteceskoi prodoljenie oboscenie funcții po parametru*, Funkt. Analiz. t. 6, nr. 4, pg. 26—40, 1972.

[8] A. Beurling — *Quasi — analiticity and general distributions*, Lectures at the A.M.S. Summer Institute, Stanford 1961.

[9] G. Björck — *Linear partial differential equations and generalized distributions*. Ark. f. Math. 6(1966) 351—407.

[10] J. — E. Björck. — *Rings of Differential Operators*, North Holland 1979.

[11] J. M. Bony — *Hyperfonctions et Equations aux dérivées partielles* Curs la Ecole Normale Supérieure, Paris, 1974—1975.

[12] J. M. Bony — *Propagation des singularités différentielles pour une classe d'opérateurs différentiels à coeficients constants* Astérique 34—35, (1976) pag. 43 — 910.

[13] J. Bros—D. Iagolnitzer — *Causability and local analyticity : mathematical study* Ann. Inst. H. Poincaré *18*, Nr. 2, 1973, pag. 147—184.

[14] C. C. Chou — *La transformation de Fourier Complexe et l'équation de convolution*, Lecture Notes in Math. 325, Springer, 1973.

[15] I. Ciorănescu—L. Zsidó : C. Rendus Acad. Sci. Paris, serie A, 285, 707—710, 753—756, 855—858, 1977.

[16] J. J. Duistermaat — *Fourier Integral Operators*, Curs Courant Institute, New-York, 1973.

[17] — *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*. Comm. Pure App. Math, 27 (1974) p. 207—281.

[18] I. I. Duister maat — L. Hörmander : *Fourier Integral Operators II*, Acta Math. *128* (1972) 183—269.

[19] V. Guillemin — S. Sternberg : *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys nr. 14, Am Math. Soc. 1977.

[20] V. Guillemin — M. Koshiwara —T. Kawai" *Seminar on Micro-local Analysis*, Princeton University Press, 1979.

[21] L. Hörmander — *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127 (1971), p. 79—183.

[22] L. Hörmander — *Uniqueness theorem and wave point sels for solutions of linear differential equations with analytic coefficient*, Comm. Pure Appl. Math. *24* (1971).

[23] L. Hörmander — *On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential operators*, L'Enseignement Math. t. XVII, Nr. 2, 1971, pag. 99—163.
[24] A. M. Jaffe — Phys. Rev. *158*, 1957
[25] Jarinov — *Analiticeskie predstavlenie adnogo classe analiticeskih functionalov, coderjascego Fourier giperfunctii* Math. Sb. *108* (150) : 1, 1978, p. 62—77.
[26] A. Kaneko — *Introduction à la théorie des hyperfonctions*, Cours Grenoble 1977—1978 (2 vol).
[27] M. Kashiwara — *Introduction to the theory of hyperfunction, in* „Seminar on Microlocal Analysis", pag. 3—38.
[28] T. Kawai — *On the theory of Fourier hyperfunctions and its application to partial differential equations with constant coefficients*, J. of the Faculty of Science, University of Tokyo Ser. I A, vol. *17*, nr. 3, pp. 467—517 1970.
[29] K. Kataoka — *On the theory of Radon transformation of hyperfunctions*, Master Thesis, Univ. of Tokyo, 1978.
[30] K. Kataoka — *Micro-local of boundary value problems*, I — II J. of the Fac. of Sciences, Univ of Tokyo, ser. I. A, *27*, Nr. 2, 355—399 şi *28* Nr 1, 31—56
[31] H. Komatsu — *Ultradistributions* I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, t. *20*, 1973, 25—105.
[32] — *Ultradistributions and hyperfunctions*, 164—179 in „Hyperfunctions and pseudodifferential Equations". Lecture Notes in Math. 287, 1973.
[33] H. Komatsu — *Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations*, in lecture Notes in Math. 287.
[34] J. Lions—E. Magenes — *Problemes aux limites non homogenes*, vol. III Dunod, 1968.
[35] B. Malgrange-M. Lejeune—L. Boutet de Monvel—*Opérateurs différentiels et pseudodifferentiels*, Seminar Grenoble 1977.
[36] A. Martineau — *Les hyperfonctions de M. Sato*, Séminaire Bourbaki, 13^{e} ane 1960/61, nr. 214
[37] T. Martineau — *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, In „Proceeding of an International Summer Seminar on Theory of Distribution" Gulbekian Institute, Lisabona, 1964.
[38] T. Miwa — T. Oshima — M. Jimbo — *Introduction to Microlocal analysis*, in Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., vol. *12*, Suppl (1977) pag. 267—300.
[39] Morimoto M. — *Sur les ultradistributions cohomologiques*, Ann. Inst. Fourier *19*, 1968, 129—153.
[40] F. Pham — *Caustiques , Phase stationnaire et microfonctions*, Curs Nisa, 1978.
[41] — *Introduction à l'étude des intégrales singulières et des hyperfonctions*, Conferinţă Hanoi, Sept. 1974.
[42] — *Singularités des systèmes différentiels de Geuss-Manin*, Progress on Math. nr. 2, Birkhauser, 1979.
[43] C. Roumieu — *Sur quelques extensions de la notion de distribution*, Ann. Sci. Ec. Normale Sup. t. 77, 1960, p. 41—121.
[44] — *Ultra distributions définies sur* $\mathbb{R}^n$ *et certaines classes de varietés différentielles*, J. Analyse Jerusalem, t. 10, 1962—63, p. 153—192
[45] M. Sato — *Theory hyperfunctions I — II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo t. 8, 1959, pp. 139—193, 287—437.
[46] — *Hyperfunctions and partial differential equations*, Proc. Interm. Conf. on Functorial Analysis and related Topics, Univ. of Tokyo Press, 1969, p. 91—94.
[47] — *Regularity in of hyperfunctions solutions of partial differential equations*, Prof. Intern. Congress of Nice, vol. 2, Gauthier — Villars, Paris, pg. 785—794, 1970.
[48] M. Sato — T. Kawai — M. Kashiwara — *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math. 287, p. 263—529 Springer, 1973.
[49] P. Schapira — *Théorie des hyperfonctions — Lecture Notes in Math*, 126, Springer, 1970.
[50] — *Sur les ultra-distributions*, Ann. Sci. Ec. Normale Super. 4^{e} Série, t. 1, 1968, 395—415.

[51] — *Introduction à l'étude des systèmes microdifférentiels*, Curs Université de Paris Sud, 1981.
[52] F. Treves — *Introduction to pseudodifferential operators and to Fourier Integral operators* (2 vol), Plenum Press, New-York, 1980.
[53] *Hyperfunctions and pseudodifferential equations* (Proc. of the Katata Symp), Lecture Notes Math. Nr. 287, Springer 1973 edited by H. Komatsu
[54] V. P. Palamodov : *O! giperfunctii k analiticeschim functionalam* Dokl. Acad. Nauk URSS, 1977, + 235 Nr. 3. pp. 534—537.
[55] V. E. Hazaikinskii V. G. Osmean B. In. Sternin. V. E. Satalov *Integralnie operatori Fourier u Kanoniceskii operatori*, Usp. Mat. Näuk. t *36*, nr. 2 (218) 1981 p. 81—140.
[56] A.S. Miscenko B. Iu. Sternin V.E. Satalov *Geometria Lagransevih mnogoobrazii u metod canoniceskogo operator*, Ed. Nauka, Moscove 1978.
[58] „*Hyperfunction and theoretical Physics*", Lecture Notes in Math. nr. 449, 1975, Edited by F. Pham.
[59] „*Complex Analysis, Microlocal calculus and Relativistic Quantum theory* (Proceed. of Symp. at Les Houches, 1979), edited by D. Iagolnitzer. Lecture Notes in Physics, 126, 1980.

Note și referiri bibliografice

În această carte au fost considerate probleme ale analizei clasice, care, în majoritatea cazurilor au o istorie destul de îndelungată. De aceea referirile pe care le vom face și care în multe cazuri sînt aproximative — pot da loc la discuții. De pildă, am legat noțiunea de regularizare a integralelor divergente de numele lui I. Hadamard și M. Riesz, dar ea se întîlnește deja la Cauchy (la definirea funcției Γ în afara domeniului de convergență a integralei) și fără îndoială Euler a folosit pentru calculele sale considerente foarte apropiate.

Capitolul I, § 1. Noțiunea de funcție generalizată, ca funcțională pe un anumit spațiu de funcții, a fost introdusă de S. L. Sobolev [20]. Sub forma pe care o prezentăm, ea a fost dată de L. Schwartz [4] § 2. Conținutul acestui paragraf este în esență preluat din cartea lui L. Schwartz [4].

§ 3—4. Ideea regularizării integralelor divergente pentru aplicații în probleme de ecuații diferențiale pornește de la J. Hadamard [8]. Lui M. Riesz [13] îi aparține metoda generală de regularizare prin prelungire analitică (v. de asemenea L. Schwartz [14]). Materialul prezentat în acest paragraf este o versiune extinsă și prelucrată a materialului corespunzător din articolul lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro [16]. Noi în comparație cu acel articol sînt: introducerea și utilizarea sistematică a funcționalelor $(x+i0)^\lambda$ și $(x-i0)^\lambda$, precum și punerea problemei regularizării canonice și rezolvarea ei pentru funcțiile de o variabilă. În clasa funcțiilor de două (sau mai multe) variabile cu singularități algebrice, problema regularizării canonice deja nu mai are soluție; după cum au descoperit V. Grușin și R. Ismagilov, deja funcțiilor de forma $\frac{\alpha(x,y)}{r^k}$ (aici $\alpha(x,y)$ este o funcție indefinit derivabilă) nu li se mai pot asocia funcționale, astfel încît condițiile regularizării canonice să fie verificate. În clase mai restrînse de funcții de mai multe variabile, regularizarea canonică este posibilă; V. Palamodov a găsit cîteva astfel de clase. De exemplu regularizarea canonică este posibilă în clasa funcțiilor $\frac{\alpha(x,y)}{P(x,y)}$, dacă distanțele între rădăcinile fiecărui polinom $P(x,y)$, situate în semiplanul superior și rădăcinile aceluiași polinom, situate în semiplanul inferior rămîn, atunci cînd x parcurge un compact oarecare al axei x, superioare unei constante pozitive.

Problema descompunerii distribuției delta în unde plane, în formularea clasică (calculul valorii unei funcții într-un punct atunci cînd se cunosc integralele acestei funcții pe hiperplane) a fost pusă de Radon în 1917 și rezolvată de F. John [10] și de alți autori; în legătură cu aceasta amintim nota lui A. Haciaturov [22], § 5, cap. I. Conținutul acestui paragraf a fost în esență împrumutat din cartea lui L. Schwartz [14]. La prelucrarea ultimelor exemple din pct. 5 a participat și N. Ia. Vilenkin.

§ 6, cap. I. Conținutul pct. 1 și 3 au fost luate din articolul lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro [16]. Rezultatele pct. 1 au fost obținute cu metode apropiate de către F. John [10], rezultatele punctului 3 au fost obținute independent și aproximativ simultan de către R. Courant și A. Lax [1]. Herglotz [9] și I. G. Petrovski au fost aceia care au dat primele formule generale pentru soluția generală a ecuației hiperbolice cu coeficienți constanți în acele cazuri în care acestea puteau fi exprimate în termenii clasici ai teoriei funcțiilor, adică pentru ecuațiile de ordin suficient de mare ($m > n+1$). Ecuațiile hiperbolice cu coeficienți constanți au fost studiate în lucrările importante ale lui L. Gârding [7], cu ajutorul metodei lui Riesz și ale lui Leray [11], cu ajutorul transformării Laplace generale. Punctul 2 a fost redactat de V. A. Borovikov după propriile sale rezultate [24].

Anexa 1. Conținutul acestei anexe este prelucrat din cartea lui L. Schwartz [14].

Capitolul II. Definirea transformării Fourier pentru funcțiile cu creștere polinomială, ca distribuții, aparține lui L. Schwartz [14]. O altă definiție a transformării Fourier pentru astfel de funcții apare la S. Bochner [1] și la T. Carleman [3]. Definiția din § 2 și § 3 a transformării Fourier pentru funcții cu creștere arbitrară aparține lui I. M. Gelfand și G. E. Șilov [17]. În articolul [17] este dată o definiție mai generală, care va fi discutată în cap. III al volumului al doilea. Spațiul Z a fost introdus de I. M. Gelfand și G. E. Șilov [17] (sub denumirea de Z^1), iar în același timp și independent de B. Malgrange [12] și L. Ehrenpreis [5]. Textul punctului § 2.6 aparține lui N. Ia. Vilenkin și Z. Ia. Șapiro.

§ 1, Cap. III. Definiția formelor diferențiale $\omega_j (j>0)$, a funcționalei $\delta(P)$ și a derivatelor sale aparține lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro [16]. Forma ω_0 a fost introdusă de J. Leray [11]. Punctul 9 este împrumutat din lucrarea lui Z. Ia. Șapiro [23].

§ 2, cap. III. Studiul polilor și reziduurilor unei forme pătratice la puterea λ a fost efectuat de M. Riesz [13], în cazul în care forma pătratică are cel mult un minus, și a fost fundamentală pentru el în studiul soluțiilor ecuației undelor. Studiul formei pătratice în cazul general, avînd drept scop teoria reprezentărilor a fost întreprinsă de I. M. Gelfand și M. I. Graev [15]. Soluțiile fundamentale ale ecuațiilor ultrahiperbolice $Lu=\delta$ au fost construite pentru prima oară de Y. Fourès-Bruhat [6]; forma în care sînt prezentate aici a fost indicată de Z. Ia. Șapiro; pentru $L^k u=\delta$ ele sînt publicate acum prima oară. Punctele 1, 2 urmează lucrările lui M. Riesz [13] și I. M. Gelfand și M. Graev [15]. Ideea care stă la baza punctelor 3—10 — trecerea în domeniul complex — aparține lui I. M. Gelfand. Această idee este prezentată în pct. 3. Rezultatele punctelor 4—6 aparțin lui I. M. Gelfand și M. I. Graeev, iar a punctelor 7—10 lui N. Ia. Vilenkin, I. M. Gelfand și Z. Ia., Șapiro. Punctele respective au fost redactate de către cei ce au obținut rezultatele corespunzătoare.

§ 3, cap. III. Rezultatele acestui paragraf sînt luate în principal din articolul lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro [16]. M. V. Fedoriuk a construit P^λ pentru orice polinom de două variabile cu un zero simplu în origine.

Anexa 3 conține o demonstrație a completitudinii spațiului K' și se datorează lui Brodski.

Anexa 4. Materialul acestei anexe este în esență extinderea la domeniul complex a rezultatelor lui I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro [10]. Aceasta este prima dată cînd ele sînt publicate sub această formă. Forma diferențiată ω a fost introdusă de Leray [16] și ω_{ij} au fost introduse independent (în cazul spațiului real) de Leray, I. M. Gelfand și Z. Ia. Șapiro.

Anexa 5 este reproducerea notei lui I. N. Bernstein și S. I. Gelfand.

Bibliografie

[1] Bochner S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig, 1932.

[2] Bureau F., *Divergent integrals and partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 143—202.

[3] Carleman T., *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala, 1944.

[4] Courant R. and Lax A., *Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables*. Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), no. 4.

[5] Ehrenpreis L., *Solution of some problems of division*, Amer. J. Math. 76 (1954), no. 4, 883—903.

[6] Fourès Bruhat Y., *Solution élémentaire d'équations ultrahyperboliques*, J. Math. Pures Appl. 35 (1956), nr. 3, 277—288.

[7] Garding L., *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients*, Acta Math. 85 (1950), 1—62.

[8] Hadamard J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, 1932.

[9] Herglotz G., *Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., vol. 78, 1926, pp. 93—126, 287—318; vol. 80, 1928, pp. 60—144; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 6, 1928, pp. 189—197.

[10] John F., *Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten*. Math. Annalen, vol. 100 (1934), 488—520; The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, Comm. pure and appl. math., vol. 3 (1950), 273—304; a se vedea și volumul aceluiași autor *Plane waves and spherical means, applied to partial differential equations*. New York, 1955.

[11] Leray J., *Les solutions élementaires d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 234 (1952), 1112—1115. a se vedea și volumul *Hyperbolic differential equations*", New York, 1955.

[12] Malgange B., *Équations aux dérivées partielles à coefficients constants*, 1. Compts Rendus Acad. Sci., 237 (1943), no. 25, 1620—1622.

[13] Riesz M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. 81 (1949), 1—223.

[14] Schwartz L., *Théorie des distributions I, II*, Paris, 1950—51.

[15] Gelfand I. M. i Graev M. I., *Analog formulî Plansereliа dlea klassiceskih grupp*, Trudî Mosk. Matem. O—va 4 (1955), 375—404.

[16] Gelfand I. M. i Sapiro Z. Ia., *Odnorodnie funkții i ih prilojenia* Uspehi Matem. Nauk 10 (1955), no. 3, 3—70.

[17] Gelfand, I. M., Șilov G. E., *Preobrazovania Fourier bistro rastucih funcții i vaprost edinstbennosti reșenia zadaci Cauchy*, Uspehi Mat. Nauk 8 (1953), nr. 4, 3—51.

[18] Mikusinski Ia. *Operatornoe ișislenie*, IL. Mosk, 1956.

[19] Petrovskii I. G., *On the diffusion of waves and the lacunes for hyperbolic equations*. Matem. sb., no. 17 (59), (1945), 289—370.

[20] Sobolev, S. L., *Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Matem. sb., no. 1 (43), (1936), 39—72.

[21] Sobolev, S. L., *Nekotorie primenenua functionalnogo analiza v matematiceskoi fizike*, Izd-vo LGU, Leningrad, 1950.

[22] Haciaturov A. A., *Opredelenie znacenia meri dlea oblasti n-mernogo prostranstva po ee znaceniam dlea vseh poluprostranstb*. Uspehi matem. Nauk, 9 (1954), no. 3 (61), 205—212.

[23] Șapiro, Z. Ia., *Ob odnom klasse obobșcennîx funkții*, Uspehi Matem. Nauk, 13 (1958), no. 3 (81), 205—212.

[24] Borovikov V. A., *Fundamentalnie reșenia lineinovo uravnenia v ceastnih proisvodnîh s postoeannîmi koeffițientami*, DAN CCCP, 119, no. 3; Disertația MGU, 1958.

INDEX DE NOȚIUNI

Completitudinea spațiului distribuțiilor, 412
Convergența unei serii de distribuții, 27
Convergența unui șir de distribuții, 27
Convergența unui șir de funcții test, 16
Convoluția a două distribuții, 130

Derivarea convoluției, 132
Derivarea unei funcționale în raport cu un parametru, 64
Derivarea funcțiilor omogene, 103
Derivarea ca operator local, 179
Derivarea de ordin fracționar, 144
Derivarea distribuțiilor, 32
Descompunerea unei distribuții în unde plane, 100
Descompunerea distribuției $\delta(x)$ în unde plane, 101
Descompunerea distribuției r^λ în unde plane, 98
Dezvoltarea asimptotică a lui $I(\varepsilon)$, 392
Dezvoltarea asimptotică a lui $\delta(xy-\varepsilon)$, 395
Dezvoltarea asimptotică a lui $\delta(x^2+y^2+z^2-t^2-\varepsilon)$, 394
Dezvoltarea Laurent a lui x_+^λ, 109
Dezvoltarea Laurent a lui x_-^λ, 113
Dezvoltarea Laurent a lui $|x|^\lambda$, 115
Dezvoltarea Laurent a lui $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, 115
Dezvoltarea Laurent a lui P_+^λ, 304
Dezvoltarea Laurent a lui P_-^λ, 322
Dezvoltarea Laurent a unei distribuții depinzînd de un parametru, 185
Dezvoltarea unei distribuții în serie Fourier, 46
Dezvoltarea Taylor a lui $\dfrac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, 118
Dezvoltarea Taylor a lui r^λ, 125
Dezvoltarea Taylor a lui x_-^λ, 112
Dezvoltarea Taylor a lui x_+^λ, 108
Dezvoltarea Taylor a lui $(x+i0)^\lambda$, 122
Dezvoltarea Taylor a lui $(x-i0)^\lambda$, 123

Dezvoltarea Taylor a lui $|x|^\lambda$, 114
Dezvoltarea Taylor a unei distribuții depinzînd de un parametru, 183
Diferențială exterioară unei forme diferențiale, 258
Distribuția r^λ, 94
Distribuția $r^{-2k-n}\ln^m r$, 126
Distribuția $r^\lambda f$, 373
Distribuția $\theta(P)$, 253
Distribuția $\delta(r^2 - c^2)$, 266
Distribuția $\delta^{(k)}(r^2 - c^2)$, 275
Distribuția $\delta(P)$, 264
Distribuția $\delta^{(k)}(P)$, 274
Distribuția $\delta(P_1, \ldots, P_n)$, 255
Distribuția $\delta_1^{(k)}(P)$, 296
Distribuția $\delta_2^{(k)}(P)$, 296
Distribuția P_+^λ, 302
Distribuția P_-^λ, 322
Distribuția $(P + i0)^\lambda$, 328
Distribuția $(P - i0)$, 328
Distribuția P^λ, 323
Distribuția $\delta^{(k)}(P_+)$, 334
Distribuția $\delta^{(k)}(P_-)$, 334
Distribuția $P^\lambda f(P_1\lambda)$, 342
Distribuția $(P + i0)^\lambda f(P, \lambda)$, 342
Distribuția $(c^2 + P + i0)^\lambda$, 344
Distribuția $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, 375
Distribuția $|x|^\lambda \ln |x|$, 114
Distribuția $|x|^\lambda \ln |x| \operatorname{sgn} x$, 115
Distribuția $\ln |x|$, 40
Distribuția $|x|^{-2m-1}\ln |x|$, 410
Distribuția $|x|^{-2m}\ln |x| \operatorname{sgn} x$, 411
Distribuția $x_+^{-n}\ln x_+$, 112
Distribuția x_+^{-n}, 110
Distribuția x_-^{-n}, 113
Distribuția $x_-^{-n}\ln x_-$, 113
Distribuția $\dfrac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, 76
Distribuția $\dfrac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, 76
Distribuția $\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)}$, 76
Distribuția $\dfrac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)}$, 76
Distribuția $\ln(x + i0)$, 49

Distribuția $\ln(x - i0)$, 121
Distribuția $(x + i0)^\lambda \ln(x + i0)$, 122
Distribuția $(x - i0)^\lambda \ln(x - i0)$, 123
Distribuția $(x + i0)^{-n} \ln(x + i0)$, 124
Distribuția $(x - i0)^{-n} \ln(x + i0)$, 125
Distribuția $(ax^2 + bx + c)_+^\lambda$, 221
Distribuția $\delta(f(x))$, 223
Distribuția $\delta^{(k)}(f(x))$, 223
Distribuție, 18
Distribuție avînd suportul într-o mulțime, 20
Distribuție complexă, 29
Distribuție constantă, 18
Distribuție cu valori vectoriale, 269
Distribuție cu simetrie sferică, 23
Distribuție cu simetrie centrală, 23
Distribuție depinzînd analitic de un parametru, 64
Distribuție depinzînd continuu de un parametru, 181
Distribuție depinzînd diferențiabil de un parametru, 182
Distribuție impară, 69
Distribuție invariantă la operații, 23
Distribuție nulă, 19
Distribuție omogenă de grad λ, 23
Distribuție pară, 69
Distribuție periodică, 23
Distribuție regulată, 18
Distribuție $\delta(x)$ (a lui Dirac), 15
Distribuție $\theta(x)$ (a lui Heaviside), 36
Distribuție $(x + i0)^\lambda$, 80
Distribuție $(x - i0)^\lambda$, 80
Distribuție $|x|^\lambda$, 69
Distribuție $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, 69
Distribuție x^{-m}, 70
Distribuție $|x|^{-2m-1}$, 116
Distribuție $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$, 116
Distribuție $x_+^\lambda \ln x_+$, 109
Distribuție $x_-^\lambda \ln x_-$, 114
Distribuție $\ln x_+$, 29
Distribuții ce coincid într-un domeniu, 20
Drum echivalent cu axa reală, 196
Drum nul, 195

Ecuația hiperbolică, 168
Ecuația integrală a lui Abel, 146
Ecuația iterată a lui Laplace, 242
Ecuația ultrahiperbolică, 334
Ecuație diferențială în distribuții, 56
Ecuație regulată, 159
Egalitatea lui Parseval, 201

Formă diferențială, 256
Formă diferențială ω, 262

Formă diferențială $\omega_k(\varphi)$, 271
Formă diferențială $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(\varphi)$, 291
Formă diferențială cu suport compact, 256
Formula de derivare a unei convoluții, 132
Formula de sumare a lui Poisson, 47
Formula lui D'Alembert, 143
Formula lui Gauss-Ostrogradski, 260
Formula lui Green, 270
Formula lui Herglotz-Petrovski, 168
Formula lui Pizzetti, 97
Formula lui Poisson, 136
Formula lui Stokes, 261
Funcție asociată, 106
Funcție beta, 90
Funcție cu simetrie sferică, 23
Funcție de suport compact, 16
Funcție delta, 147
Funcție echivalentă cu o funcție omogenă, 376
Funcție formal omogenă, 356
Funcție Γ, 72
Funcție hipergeometrică, 106
Funcție local integrabilă, 17
Funcție omogenă pozitivă, 357
Funcție test, 16
Funcțională analitică, 194
Funcțională cu suport compact, 20
Funcțională liniară și continuă, 17
Funcțională liniară și continuă pe spațiul K, 17
Funcțională liniară și continuă pe spațiul S, 31
Funcțională liniară și continuă pe spațiul Z, 192
Funcțională regulată, 18

Integralele lui Sonin, 152
Integrare fracționară, 113
Integrarea formelor diferențiale, 259
Integrarea unei distribuții în raport cu un parametru, 181

Medie sferică, 94
Metoda prelungirii analitice, 64
Multiplicator, 193

Operatorul lui Laplace, 13
Ovale, 170

Partiția unității, 176
Polinom Iacobi, 150
Potențial newtonian, 133
Prelungirea analitică a unei funcții omogene, 103
Primitiva unei distribuții, 60
Produs direct de distribuții, 127
Produsul dintre o funcție indefinit derivabilă cu o distribuție, 21
Produsul exterior a două forme diferențiale, 256

Proprietăți locale ale unei distribuții, 19
Punct esențial al unei distribuții, 19
Punct reductibil de ordin k și grad m, 376
Punct singular reductibil, 376

Regularizare canonică, 82
Regularizare la infinit, 91
Regularizare pe un interval finit, 87
Regularizarea unei funcții, 10
Regularizarea unei integrale divergente, 24
Reziduul unei funcții omogene pozitive, 360

Seria Fourier a unei funcții periodice, 46
Singularitățile seriilor trigonometrice, 49
Soluție fundamentală, 134
Soluție fundamentală a problemei Cauchy, 139
Soluție fundamentală a unei ecuații a coardei vibrante, 143
Soluție fundamentală a unei ecuații diferențiale ordinare, 135
Soluție fundamentală a unei ecuații diferențiale regulate, 159
Soluție fundamentală a unei ecuații eliptice, 152
Soluție fundamentală a unei ecuații eliptice omogene, 156
Soluție fundamentală a unei ecuații hiperbolice omogene, 168
Soluție fundamentală a unei ecuații ultrahiperbolice, 331
Spațiul K, 16
Spațiul K', 19
Spațiul S, 30
Spațiul S', 31
Spațiul Z, 188
Spațiul Z', 192
Strat de ordin k, 283
Strat simplu, 283
Suportul unei convoluții, 130
Suportul unei distribuții, 19
Suportul unui produs direct de distribuții, 128
Suprafață echivalentă cu spațiul real, 198
Suprafață nulă, 198

Transformarea Fourier, 186
Transformarea Fourier a distribuției $x^{-2m+1} \ln|x|$, 218
Transformarea Fourier a distribuției $|x|^{-2m} \ln|x| \operatorname{sgn} x$, 20
Transformarea Fourier a distribuției x_-^{-n}, 216
Transformarea Fourier a distribuției x_+^{-n}, 216
Transformarea Fourier a distribuției $x_n^{-n} \ln x$, 215
Transformarea Fourier a distribuției $(ax^2 + bx + c)_-^{\lambda}$, 221
Transformarea Fourier a distribuției $r^{-2k-n} \ln^m r$, 236
Transformarea Fourier a distribuției $\delta(r - a)$, 339
Transformarea Fourier a distribuției P_+^{λ}, 231
Transformarea Fourier a distribuției P_-^{λ}, 341
Transformarea Fourier a distribuției $(c^2 + P + i0)^{\lambda}$, 346
Transformarea Fourier a distribuției $\dfrac{(c^2 + P)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda + 1)}$, 348

Transformarea Fourier a distribuției $\delta^{(s)}(c^2 + P)$, 353
Transformarea Fourier inversă, 202
Transformarea Fourier pe spațiul funcțiilor test, 186
Transformarea Fourier pe spațiul distribuțiilor, 201
Transformarea Laplace, 219
Transformarea Fourier a unei funcții periodice, 205
Transformata Fourier a funcției exponențiale, 204
Transformata Fourier a distribuției $\delta(x)$, 202
Transformata Fourier a distribuției x_+^λ, 207
Transformata Fourier a distribuției x_-^λ, 208
Transformata Fourier a distribuției $(x + i0)^\lambda$, 210
Transformata Fourier a distribuției $(x - i0)^\lambda$, 210
Transformata Fourier a distribuției $|x|^\lambda$, 208
Transformata Fourier a distribuției $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, 208
Transformata Fourier a distribuției x^{-m}, 210
Transformata Fourier a distribuției $|x|^{-2m-1}$, 219
Transformata Fourier a distribuției $x_+^\lambda \ln x_+$, 212
Transformata Fourier a distribuției $x_-^\lambda \ln x_-$, 212
Transformata Fourier a distribuției $\ln x_+$, 212
Transformata Fourier a distribuției $|x|^\lambda \ln x$, 213
Transformata Fourier a distribuției $|x|^\lambda \ln |x| \operatorname{sgn} x$, 213
Transformata Fourier a distribuției $\ln |x|$, 213
Transformata Fourier a distribuției $\ln x_-$, 212
Transformata Fourier a distribuției $x^{-2m} \ln x$, 217
Trecerea la limită în spațiul K, 16
Trecerea la limită în spațiul K', 27
Trecerea la limită în spațiul S, 30
Trecerea la limită în spațiul S' 31
Trecerea la limită în spațiul Z, 190
Trecerea la limită în spațiul Z', 192

Unicitatea formei ω, 263
Unicitatea regularizării canonice, 81